2023

ANNALES

Mathématiques Approfondies

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Deux exercices d'application des connaissances de base
- Un problème faisant largement appel aux probabilités.

ÉVALUATION

- Les deux exercices sont de valeur sensiblement égale dans le barème.
- La moitié des points sont destinés au problème.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

Exercice 1

Partie 1

1. (a) On calcule : $AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) ◇ AB et BA étant triangulaires supérieures, leurs valeurs propres sont donc les coefficients diagonaux.
   Alors les valeurs propres de AB et BA sont -1 et 2.

   ◇ Remarquons que $AB \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $BA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur nul.
   Or AB et BA sont de taille 2×2 et ont deux valeurs propres, les dimensions de chacun des sous-espaces propres sont égales à 1, Ainsi $\mathrm{Ker}(AB - 2I_2) = \mathrm{Ker}(BA + I_2) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

   ◇ Par ailleurs, $AB + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA - 2I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(AB + I_2) = (\mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ et $\mathrm{Ker}(BA - 2I_2) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$

2. (a) Supposons que $BX = 0$. Alors $ABX = A0 = 0$.
   Or $ABX = \lambda X$, et X est un vecteur propre, $X \neq 0$. Donc $\lambda = 0$.
   Par contraposée, $BX \neq 0$.

   (b) $BABX = B(ABX) = B(\lambda X) = \lambda BX$. Et d'après la question précédente, $BX \neq 0$.
   Donc BX est un vecteur propre de BA et λ la valeur propre associée.

3. (a) ◇ Si $BX = 0$, en multipliant à gauche par B^{-1}, alors $X = 0$.
   Or X est un vecteur propre donc non nul. Ainsi, $BX \neq 0$.

   ◇ $BABX = B(ABX) = B0 = 0$ et $BX \neq 0$. Donc 0 est une valeur propre de BA (et BX est un vecteur propre associé).

   (b) B n'est pas inversible, donc $\mathrm{rg}(B) < n$.
   Or $\mathrm{Im}(BA) \subset \mathrm{Im}(B)$. Alors $\mathrm{rg}(BA) \leqslant \mathrm{rg}(B)$.
   Donc $\mathrm{rg}(BA) < n$
   Donc BA n'est pas inversible, donc 0 est une valeur propre de BA.

4. On vient de voir que $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathrm{Sp}(BA)$. En échangeant A et B qui jouent des rôles symétriques, $\mathrm{Sp}(BA) \subset \mathrm{Sp}(AB)$.
   Donc $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

5. On a vu dans l'exemple de la question 1 que ce n'était pas toujours le cas.
Il existe des matrices A et B telles que les sous-espaces propres de AB et BA soient différents.

Partie 2

6. (a) Posons $Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. Alors $Q(A) = 0$.
Q est un polynôme non nul car les coefficients ne sont pas tous nuls.
Ainsi Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur non nul de A.

   (b) Les valeurs propres de A sont parmi les racines de Q, donc sont au plus au nombre de $n-1$.
Or A admet n valeurs propres deux à deux distinctes. D'où la contradiction.

   (c) Ainsi $\forall(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0$, alors $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_i = 0$.
Donc par définition la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre.

7. (a) A est une matrice de taille $n\times n$ admettant n valeurs propres. Donc $\dim(E(\lambda_1)) = \cdots = \dim(E(\lambda_n)) = 1$.
Comme $X \neq 0$, X est donc une base de $E(\lambda)$, donc $E(\lambda) = \mathrm{Vect}(X)$.

   (b) $BAX = B(\lambda X) = \lambda BX$ et $BAX = ABX$.
Ainsi $BAX = \lambda BX = ABX$.

   (c) D'après la question précédente $A(BX) = \lambda BX$, donc $BX \in E(\lambda)$.
Or d'après la question 7a, $E(\lambda) = \mathrm{Vect}(X)$.
Donc $BX \in \mathrm{Vect}(X)$.

8. Soit X un vecteur propre de A.
D'après la question précédente, $BX \in \mathrm{Vect}(X)$. Donc il existe un réel μ tel que $BX = \mu X$.
Comme $X \neq 0$, X est un vecteur propre de B.
Ainsi tout vecteur propre de A est aussi un vecteur propre de B.

9. (a) A est une matrice de taille $n \times n$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, donc A est diagonalisable.
Ainsi il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A. D'après la question précédente, tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.
Ainsi il existe une base $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A et de B

   (b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
$ABX_i = \mu_i AX_i = \lambda_i \mu_i X_i$.
Comme $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, AB est diagonalisable, et ses valeurs propres sont $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n$

10. (a) Notons φ l'application $P \mapsto \big(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\big)$
   - Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et α et β deux réels.
Alors $\varphi(\alpha P + \beta Q) = \big((\alpha P + \beta Q)(\lambda_1), \ldots, (\alpha P + \beta Q)(\lambda_n)\big) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$.
Donc φ est une application linéaire.

- Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $\varphi(P) = 0$.
  Alors $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_n) = 0$. Ainsi, P a n racines distinctes (au moins), et est de degré au plus $n-1$, donc P est nul.
  Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Donc φ est injective.
- Comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[x]) = \dim(\mathbb{R}^n)$, φ est bijective.

Ainsi φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^n$.

(b) Par bijectivité de φ, comme $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant $P(\lambda_1) = \mu_1, \ldots, P(\lambda_n) = \mu_n$.
Et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $BX_i = \mu_i X_i = P(\lambda_i)X_i$.

Ainsi il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vérifiant $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ BX_i = P(\lambda_i)X_i$.

(c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
X_i est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.
Alors X_i est un vecteur propre de $P(A)$ associé à la valeur propre $P(\lambda_i)$.
Donc pour tout i de $[\![1, n]\!]$: $P(A)X_i = P(\lambda_i)X_i = BX_i$.
Or $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc $P(A) = B$.

11. (a)
- $\mathscr{C}_A \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- la matrice nulle est un élément de $\mathscr{C}_A$.
- Soit B et B' deux éléments de $\mathscr{C}_A$ et α un réel.
  Alors $A(B + \alpha B') = AB + \alpha AB' \underset{B,B' \in \mathscr{C}_A}{=} BA + \alpha B'A = (B + \alpha B')A$. Donc $(B + \alpha B') \in \mathscr{C}_A$.

Ainsi $\mathscr{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) $(\subset)$ D'après la question 10, $\mathscr{C}(A) \subset \big\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\big\}$.
$(\supset)$ Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $P(A)A = AP(A)$, donc $P(A) \in \mathscr{C}(A)$.
Donc $\big\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\big\} \subset \mathscr{C}(A)$.

Ainsi $\mathscr{C}(A) = \big\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\big\}$.

(c) Or, $\big\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\big\} = \mathrm{Vect}(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$.
D'après la question 6, la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre. Donc la famille $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est donc une base de $\big\{P(A), P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]\big\}$ donc de $\mathscr{C}(A)$.

Ainsi la dimension de $\mathscr{C}_A$ est n.

Exercice 2

1. On a supposé que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, à valeurs propres strictement positives. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de f, donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, donc f est injectif.
Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie, f est bijectif, donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$.

2. (a) L'endomorphisme f est symétrique si pour tout couple (x, y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
(b) Comme f est symétrique et que la base canonique est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique, A est symétrique, ou encore ${}^tA = A$.

(c) D'après le théorème spectral, comme A est symétrique réelle, donc A est diagonalisable dans une base orthonormée.
En notant P une matrice de passage vers une base orthonormée de vecteurs propres de A et D la matrice des valeurs propres correspondantes, $A = PDP^{-1}$.
Or P est une matrice de passage d'une base orthonormée (la base conoique) vers une base orthonormée (composée de vecteurs propres), P est orthogonale, donc $P^{-1} = {}^tP$.

Donc $D = {}^tPAP$ est diagonale.

(d) Il existe alors une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ dans laquelle la matrice A est diagonale, et l'on peut supposer que cette matrice est $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle x, \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i$ et $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle x, \varepsilon_i\rangle^2$.
Par linéarité de f, $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i f(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Par l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée,

$$\langle x, f(x)\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Or $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$ et $x_i^2 \geqslant 0$. Donc $\lambda_1 \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Donc pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant \lambda_n\|x\|^2$.

(e) **($\Longleftarrow$)** Si $\langle f(x), x\rangle = 0$, alors $0 \leqslant \lambda_1\|x\|^2 \leqslant 0$.
Or $\lambda_1 \neq 0$. donc $\|x\|^2 = 0$, donc $x = 0$.

($\Longrightarrow$) Si $x = 0$, alors $\langle f(x), x\rangle = 0$.

Ainsi $\langle f(x), x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

3. (a) Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $x = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j e_j$.

Et $f(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_j e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right) e_i$.
Donc

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right) x_i = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Or $\langle u, x\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n u_i x_i$.

Donc $g(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} x_i x_j - \sum_{i=1}^n u_i x_i$.

(b) La fonction g est polynomiale, donc g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Dans la somme double, les termes faisant intervenir x_1 sont :

— $a_{1,1}x_1^2$;

— pour chaque $2 \leqslant j \leqslant n$: $a_{1,j}x_1x_j$ et $a_{j,1}x_jx_1$: ces termes sont identiques par symétrie de A.

Alors $\partial_1 g(x) = \dfrac{1}{2}\left(2a_{1,1}x_1 + 2\displaystyle\sum_{j=2}^{n} a_{1,j}x_j\right) - u_1$.

Ainsi $\partial_1 g(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j - u_1$.

(c) Par symétrie du problème en fonction des différentes coordonnées, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $\partial_i g(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - u_i$.

On reconnaît la i^{e} coordonnée dans la base canonique de $f(x) - u$.

Ainsi $\nabla g(x) = f(x) - u$.

4. Remarquons que $\nabla g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = u$.
Or f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Donc $f(x) = u$ si et seulement si $u = f^{-1}(x)$.
Ainsi, g admet un unique point critique : $f^{-1}(u)$.

5. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
g(x) - g(m) &= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle u, x\rangle - \frac{1}{2}\langle f(m), m\rangle + \langle u, m\rangle \\
&\underset{\text{car } u=f(m)}{=} \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle f(m), x\rangle - \frac{1}{2}\langle f(m), m\rangle + \langle f(m), m\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle f(x) - f(m), x\rangle - \frac{1}{2}\langle f(m), x\rangle + \frac{1}{2}\langle f(m), m\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle f(x - m), x\rangle - \frac{1}{2}\langle f(m), x - m\rangle \\
&\underset{\text{par symétrie de } f}{=} \frac{1}{2}\langle f(x - m), x\rangle - \frac{1}{2}\langle m, f(x - m)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle f(x - m), x - m\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{1}{2}\big\langle f(x - m), x - m\big\rangle = g(x) - g(m)$.

6. D'après les questions 2d et 2e, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\big\langle f(x - m), x - m\big\rangle \geqslant 0$.
Ainsi, g admet un minimum en m.

7. (a) Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle f(a + h), a + h\rangle = \langle f(a) + f(h), a + h\rangle = \langle f(a), a\rangle + \langle f(a), h\rangle + \langle f(h), a\rangle + \langle f(a), f(h)\rangle.$$

Par symétrie de f :

$$\langle f(a), h\rangle + \langle f(h), a\rangle = 2\langle f(a), h\rangle,$$

Ainsi $\big\langle f(a+h), a+h\big\rangle = \big\langle f(a), a\big\rangle + 2\big\langle f(a), h\big\rangle + \big\langle f(h), h\big\rangle$.

(b)

$$\begin{aligned} g(a+h) &= \frac{1}{2}\langle f(a+h), a+h\rangle - \langle u, a+h\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(\big\langle f(a), a\big\rangle + 2\big\langle f(a), h\big\rangle + \big\langle f(h), h\big\rangle\right) - \langle u, a\rangle - \langle u, h\rangle \\ &= g(a) + \langle f(a) - u, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle \\ &= g(a) + \langle \nabla g(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi $g(a+h) = g(a) + \big\langle \nabla g(a), h\big\rangle + \dfrac{1}{2}\big\langle f(h), h\big\rangle$.

8. (a) D'après la question précédente avec $a = m_p$ et $h = -\alpha\nabla g(m_p)$, ce qui donne $a + h = m_{p+1}$,

$$g(m_{p+1}) = g(m_p) + \langle \nabla g(m_p), -\alpha\nabla g(m_p)\rangle + \frac{1}{2}\langle f(-\alpha\nabla g(m_p)), -\alpha\nabla g(m_p)\rangle,$$

Donc $g(m_{p+1}) = g(m_p) - \alpha\big\|\nabla g(m_p)\big\|^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}\big\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\big\rangle$.

(b) D'après la question 2d, $\big\langle f(\nabla g(m_p)), \nabla g(m_p)\big\rangle \leqslant \lambda_n\|\nabla g(m_p)\|^2$,

Or $\alpha^2 > 0$: $g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p) - \alpha\big\|\nabla g(m_p)\big\|^2 + \dfrac{\alpha^2\lambda_n}{2}\|\nabla g(m_p)\|^2$.

Donc $g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p) - \alpha\left(1 - \dfrac{\alpha\lambda_n}{2}\right)\big\|\nabla g(m_p)\big\|^2$.

9. (a) Comme $\alpha\lambda_n \leqslant 1$, on a $1 - \dfrac{\alpha\lambda_n}{2} \leqslant 1$, donc $g(m_{p+1}) \leqslant g(m_p) - \alpha\big\|\nabla g(m_p)\big\|^2 \leqslant g(m_p)$.
Ainsi, la suite de terme général $g(m_p)$ est décroissante, et minorée par $g(m)$ (par la question 6).
Par limite monotone, la suite $\big(g(m_p)\big)_{p\geqslant 0}$ converge.

(b) Soit p un entier naturel.
D'après la question 5, $g(m_p) - g(m) = \dfrac{1}{2}\langle f(m_p) - f(m), m_p - m\rangle$.
D'après la question 2d,

$$g(m_p) - g(m) \geqslant \frac{\lambda_1}{2}\|m_p - m\|^2.$$

Or $\lambda_1 > 0$. Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|m_p - m\|^2 \leqslant \dfrac{2}{\lambda_1}\big(g(m_p) - g(m)\big)$.

(c) D'après la question 9a, $\lim\limits_{p\to+\infty} g(m_p) - g(m) = 0$.

Par encadrement, $\lim\limits_{p\to+\infty} \|m_p - m\| = 0$.

10. (a) • f est une application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$

- Soit (x, y), (x', y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$, et α et β deux réels.

$$\begin{aligned}\text{Alors } f\big(\alpha(x,y)+\beta(x',y')\big) &= f\big(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y'\big)\\ &= \big(2(\alpha x+\beta x')+\alpha y+\beta y', \alpha x+\beta x'+2(\alpha y+\beta y')\big)\\ &= \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

- Soit (x, y), (x', y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\big\langle f(x,y),(x',y')\big\rangle &= \big\langle (2x+y, x+2y),(x',y')\big\rangle\\ &= (2x+y)x'+(x+2y)y'\\ &= 2xx'+yx'+xy'+2yy'\\ &= \big\langle (x,y), f(x',y')\big\rangle\end{aligned}$$

Donc f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$.

(b) La courbe de $g(m_p)$ n'est pas décroissante pour $\alpha = \alpha_1$: α_1 ne vérifie donc pas les hypothèses de l'énoncé.

Ainsi, α_0 vérifie les hypothèses de l'énoncé.

(c) On voit que les deux suites (m_p) partent de $(-1, -1)$: c'est m_0. Pour $\alpha = \alpha_0$, les m_p se rapprochent du point $m = (1, 0)$.

(d) On a bien $f(1, 0) = (2, 1)$.

La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (qui est orthonormée) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme les sommes des coefficients sur les lignes de A sont égales à 3, 3 est une valeur propre évidente de f. Comme $\mathrm{Tr}(A) = 4$, 1 est aussi valeur propre de f.

Ainsi, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. On a bien $0,2 \leqslant \dfrac{1}{\lambda_2}$.

Les hypothèses de l'énoncé sont donc bien vérifiées pour $\alpha_0 = 0,2$.

Problème

Partie 1

1.

```
def F(x):
    return np.exp(x)/(1 + np.exp(x))
```

2. ◇ La fonction F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur des fonctions qui le sont aussi (exponentielle, fonction constante).

◇ Soit $x \in \mathbb{R}$. Par dérivation d'un quotient :

$$f(x) = F'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.

◇ Par dérivation d'un produit :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - 2\mathrm{e}^{2x}}{(1+\mathrm{e}^x)^3} = \frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$.

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
$f(x)$			$+$		
F	0		$\nearrow$		1

4. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2} = f(x).$$

Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

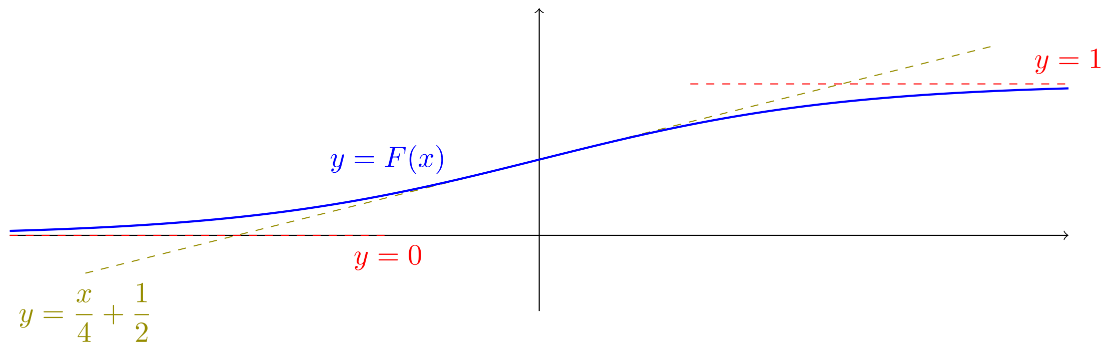
$$F(x) - \frac{1}{2} = \frac{2\mathrm{e}^x - (1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x+1},$$

alors

$$F(-x) - \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1} \cdot \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = -\left(F(x) - \frac{1}{2}\right).$$

Ainsi, f est paire et $F - \dfrac{1}{2}$ est impaire.

5. Les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe de f. Comme $f' = F''$ change de signe en 0, la courbe de F admet un point d'inflexion, au point d'abscisse $x = 0$. Comme $F(0) = \dfrac{1}{2}$ et $F'(0) = f(0) = \dfrac{1}{4}$, la tangente à la courbe de f en ce point a pour équation $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$.



6. ◇ La fonction F étant continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, vérifiant $F(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, par le théorème de la bijection, **F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.**

   ◇ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, 1[$, on résout :

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Leftrightarrow y = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^x} \\ &\Leftrightarrow (1 + \mathrm{e}^x) y = \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \frac{y}{1 - y} \\ &\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1 - y}\right). \end{aligned}$$

   Donc $F^{-1} : y \mapsto \ln\left(\dfrac{y}{1 - y}\right)$.

Partie 2

7. Soit $n \geqslant 1$, on a $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$. Or, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, car $2 > 1$.

   Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge absolument, donc converge.

8. • La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
   • F est une primitive de f et F admet une limite nulle en $-\infty$ et admet 1 comme limite en $+\infty$.
     Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

   Donc la fonction f est bien une densité de probabilité. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.
   Ainsi, si X est une variable aléatoire de densité f, alors $F(x) = P(X \leqslant x)$.
   La fonction F est donc bien la fonction de répartition associée.

9. • La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$.

- $x^2 f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

  Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ converge.

- La fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est paire sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le changement de variable $x=-t$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature donc convergentes.

Ainsi, X^2 admet une espérance.

Ainsi X admet une espérance et une variance.

10. (a) Par le changement de variable affine $x=-t$ et par parité de f :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty} tf(-t)\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

(b) D'après la relation de Chasles $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$.

D'après la question précédente, $E(X)=0$.

11. ◇ D'après la relation de Chasles, $V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Or, par parité de $x \mapsto x^2 f(x)$ on a (on pourrait poser $x=-t$ comme dans la question précédente) :

$V(X) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} x^2 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x.$

◇ Soit A un réel strictement positif.

Par intégration par parties sur $[0,A]$, et comme $x\mapsto x^2$ et $F-1$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$,

$$\int_0^A x^2 f(x)\mathrm{d}x = \left[x^2(F(x)-1)\right]_0^A - 2\int_0^A x(F(x)-1)\mathrm{d}x$$

Or pour tout réel x, $F(x)-1 = -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Donc $\displaystyle\int_0^A x^2 f(x)\mathrm{d}x = -A^2\frac{\mathrm{e}^{-A}}{1+\mathrm{e}^{-A}} + 2\int_0^A \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$. Or, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^2\frac{\mathrm{e}^{-A}}{1+\mathrm{e}^{-A}} = 0$.

Donc en passant à la limite, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

Ainsi $V(X) = 4\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

12. Soit W une variable aléatoire qui suit une loi $\mathscr{E}(n)$.
Or une densité de W est $x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ ne^{-nx} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
W admet une espérance qui vaut $\dfrac{1}{n}$.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} nx\, e^{-nx} \mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{n}$.
Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx} \mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{n^2}$.

13. Soit n un entier naturel non nul.
Par linéarité de l'intégrale,

$$\sum_{n=1}^{N} \left((-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} xe^{-nx} \mathrm{d}x \right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left((-1)^{n-1} xe^{-nx} + (-1)^N R_N(x) \right) \mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (-x)^{n-1} xe^{-nx} = \frac{xe^{-x}\left(1-(-1)^N e^{-Nx}\right)}{1+e^{-x}}$ (somme des N premiers termes de la suite géométrique de raison $-e^{-x}$ et de premier terme xe^{-x}).
Alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (-x)^{n-1} xe^{-nx} + (-1)^N R_N(x) = \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}$.
Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left((-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} xe^{-nx} \mathrm{d}x \right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} \mathrm{d}x$.
Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle V(X) = 4 \left(\sum_{n=1}^{N} \left((-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} xe^{-nx} \mathrm{d}x \right) + (-1)^N \int_0^{+\infty} R_N(x) \mathrm{d}x \right)$

14. (a) Pour tout réel x positif, $1 + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 > 0$ et $x\mathrm{e}^{-(N+1)x} \geqslant 0$, donc $0 \leqslant \dfrac{x\mathrm{e}^{-(N+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leqslant x\mathrm{e}^{-(N+1)x}$.
Alors pour tout réel x positif, alors $0 \leqslant R_N(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-(N+1)x}$.
Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}_+, \ |R_N(x)| \leqslant x\mathrm{e}^{-(N+1)x}$.

(b) Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} R_N(x) \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(N+1)x} \mathrm{d}x,$$

D'après la question 12, $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^{+\infty} R_N(x) \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(N+1)^2}$.
Donc par encadrement comme $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{(N+1)^2} = 0$, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(x) \mathrm{d}x = 0.$

15. En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité obtenue à la question 13 :

$$V(X) = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx} \mathrm{d}x = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 4\frac{\pi^2}{12}.$$

Ainsi $V(X) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

Partie 3

16. Les variables aléatoires (X_i^2) sont mutuellement indépendantes, de même loi, ont une espérance et une variance. Et $E(X_1^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 = V(X_1) = \dfrac{\pi^2}{3}$.

    Par la loi faible des grands nombres, $\dfrac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \dfrac{\pi^2}{3}$.

17. On a bien : $V_n \geqslant 0$.

    De plus, la fonction $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

    Ainsi, par composition : $\sqrt{3V_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \pi$.

18. Soit $x \in \mathbb{R}$.
    Par croissance stricte de F^{-1} (comme réciproque de fonction strictement croissante) : $[F^{-1}(U) \leqslant x] = [U \leqslant F(x)]$. Donc $P(F^{-1}(U) \leqslant x) = P(U \leqslant F(x)) = F(x)$ car $F(x) \in]0,1[$.
    Ainsi, $F^{-1}(U)$ a même fonction de répartition que X. Donc $F^{-1}(U)$ a même loi que X.

19.

```
def realisation_X():
    U=rd.random()
    return np.log(U/(1-U))
```

20.

```
def estimateurpi(n):
    X=[realisation_X() for i in range(n)]
    M=sum(X**2)/len(X)
    return np.sqrt(3*M)
```

21. (a) ◇ La fonction Φ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.
    Par le théorème de la bijection, il existe donc un unique $z \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(z) = 0,975$.

    ◇ Or $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $z \geqslant 0$.

    (b) Les variables aléatoires X_i^2 sont mutuellement indépendantes et admettent une variance. Donc d'après le théorème central limite : avec $\sigma = \sigma(X_1^2) = \dfrac{4\pi^2}{3\sqrt{5}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right) = \Phi(z) - \Phi(-z).$$

Or si Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $P(-z \leqslant Z \leqslant z) = 2\Phi(z) - 1 = 0,95$.

Ainsi $P\left(\dfrac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \dfrac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,95.$

(c) On a donc $\pi^2 \leqslant 16$ et $z \leqslant 2$, donc

$$P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{4\pi^2}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant z\right) \leqslant P\left(\frac{3\sqrt{5n}}{64}\left|V_n - \frac{\pi^2}{3}\right| \leqslant 2\right)$$

Or, $\left[\dfrac{3\sqrt{5n}}{64\pi^2}\left|V_n - \dfrac{\pi^2}{3}\right| \leqslant 2\right] = \left[\left|V_n - \dfrac{\pi^2}{3}\right| \leqslant \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}\right] = \left[\dfrac{\pi^2}{3} \in \left[V_n - \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}, V_n + \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}\right]\right]$.

Donc un intervalle de confiance asymptotique pour $\dfrac{\pi^2}{3}$ est $\left[V_n - \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}, V_n + \dfrac{128}{3\sqrt{5n}}\right]$

(d) Remarquons que si $V_n - \dfrac{128}{3\sqrt{5n}} \leqslant 0$, alors on peut améliorer la borne inférieure : $\pi \geqslant 0$!

On a donc, par croissance stricte de $x \mapsto \sqrt{3x}$:

$$\left[\frac{\pi^2}{3} \in \left[V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}}, V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right]\right] = \left[\pi \in \left[\sqrt{3\left(\max\left(0, V_n - \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right)\right)}, \sqrt{3\left(V_n + \frac{128}{3\sqrt{5n}}\right)}\right]\right]$$

Un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour π est donc $\left[\sqrt{\max\left(0, 3V_n - \dfrac{128}{\sqrt{5n}}\right)}, \sqrt{3V_n +\right.$

22. On remarque que V_n se rapproche de π : en effet, c'est un estimateur consistant de π. De plus, V_n reste dans les bornes de l'intervalle de confiance donné.

23. Même si l'écart entre V_n et π est parfois supérieur à la borne donnée par l'intervalle de confiance, π est dans l'intervalle de confiance plus de 95% du temps, sur les simulations proposées, ce qui est cohérent avec ce qui fut démontré ci-dessus (la démonstration ne donnant qu'un argument asymptotique).

CONCOURS ECRICOME PREPA

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs.

Rappelons que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve et que, plus des deux tiers des candidats y répondent de façon suffisamment satisfaisante.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 4,81, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

Le soin apporté aux copies est très variable : certaines (rares) sont irréprochables, quand de nombreuses ratures brouillonnes sont présentes dans d'autres. Les quelques candidats qui ne réalisent pas cet effort ne pourront qu'être évalués sévèrement. On demande en particulier aux candidats d'écrire suffisamment gros, d'aérer leur copie, de séparer clairement les blocs de calculs des blocs de rédaction, d'aligner ces blocs de calculs (sans zig-zags) et d'encadrer (si possible en couleur) leurs conclusions. Enfin, une maîtrise des ratures est indispensable : mieux vaut parfois barrer proprement un passage, plutôt que de laisser des lignes illisibles sur sa copie.

Certains candidats ne concluent pas explicitement à chaque question (il suffit pourtant de reprendre l'intitulé de la question, en encadrant ou soulignant la phrase). Or, dans bien des cas, les réponses sont imprécises, et

le correcteur est alors en droit de se demander si le candidat est réellement sûr d'avoir conclu, ou s'il a plutôt abandonné la question en cours de route. Ce doute profite malheureusement rarement au candidat. Nous ne pouvons donc qu'encourager les candidats à conclure clairement leurs raisonnements, et leurs réponses.
Trop de candidats ne font apparaître aucun lien logique entre les différentes étapes de leurs raisonnements. Il est impératif d'indiquer le type de raisonnement effectué (par équivalence, en écrivant des $\Leftrightarrow$, ou déductif, en enchaînant les « donc »).
Trop de candidats ne répondent que partiellement aux questions posées (exemple : question 6a. de l'exercice 1 , autre exemple: question 1.1b : on donne les vecteurs propres mais pas les sous-espaces propres), peut être par lecture trop hâtive du sujet, ce qui a souvent pour effet d'invalider leur réponse. Nous ne pouvons que conseiller aux candidats de prendre le temps de lire chaque question attentivement (le sujet est certes long, mais il n'est nullement nécessaire de le terminer pour obtenir une excellente note), voire de la relire au moment de passer à la question suivante, et de répondre à chaque question en reprenant les termes de l'énoncé.
Concernant l'écriture du Python, il est important que l'indentation soit clairement signifiée. Le plus simple est de délimiter un bloc d'indentation par un trait vertical, à gauche.

En algèbre linéaire, on retrouve (comme toutes les années) bien trop de confusions sur les notions manipulées (exemple : « un endomorphisme est bijectif car sa matrice est symétrique », « une matrice est inversible car diagonalisable »). La dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi souvent annoncée comme étant égale à n.
La commande `print`apparait trop souvent dans les fonctions en remplacement de l'instruction de renvoi (`return`).
De manière générale, de nombreux candidats ne semblent pas à l'aise avec le calcul fractionnaire et les notations de puissances (par exemple dans les manipulations du problème), mais aussi avec le parenthésage des expressions.

Exercice 1

Cet exercice d'algèbre compare dans une première partie les valeurs propres de AB et de BA et les sous-espaces propres de AB et de BA. Dans une deuxième partie, dans le cas particulier d'une matrice Aadmettant n valeurs propres deux à deux distinctes, l'ensemble des matrices commutant avec A est déterminer.

Partie 1

1. (a) Ce calcul simple de produit matriciel n'est pas toujours bien réalisé. La présentation laisse à désirer: ainsi il est tout à fait compréhensible que l'écriture suivante soit faite au brouillon mais pas une copie, elle n'a aucun sens:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (b) Cette question est traitée de manière trop peu efficace par beaucoup de candidats. Notamment, trop peu de candidats lisent le spectre de AB et de BA sur leurs diagonales.
   Des candidats parlent de déterminant, notion qui n'est pas explicitement au programme de mathématiques approfondies.

Pour « résoudre » l'équation $(\lambda+1)(\lambda-2)=0$, certains candidats développent le trinôme, avant d'écrire un discriminant et de (re)trouver les racines de ce trinôme...(ou d'autres!!)
Pour quelques candidats, la méthode utilisant le déterminant ne donne que des valeurs propres possibles.
Les quelques candidats qui trouvent des SEP réduits au vecteur nul ne prennent pas de recul sur leurs calculs!

2. Dans cette question, certains candidats ont continué à travailler avec les matrices A et B définies précédemment. Un lecture plus attentive du sujet aurait permis d'éviter cette méprise pénalisante.
   (a) Cette question rencontrée par tous les candidats lors de leur préparation a fait l'objet de manière assez fréquente des erreurs classiques et relevées un bon nombre de fois par les enseignants:
   Produit nul vu souvent ($BX=0 \Rightarrow B=0$ ou $X=0$).
   La preuve par l'absurde n'est pas toujours explicitement citée.
   Des équivalences sont employées abusivement.
   (b) Cette question assez simple vise essentiellement à vérifier la définition d'un vecteur propre. Ainsi l'oubli très fréquent de préciser que le vecteur propre BX est non nul est pénaliser.
3. (a) Cette question est rarement bien traitée. Lintérête de l'hypothèse B inversible n'est pas perçue. Ainsi le raisonnement suivant et incorrect est trop souvent rencontré: « B est inversible, donc non nulle (certes. . .) ,et X non nul donc BX non nul... »
   (b) La première partie de cette question: $\mathrm{rg}(BA)<n$ est très rarement réussi. Beaucoup de candidats affirment : « B non inversible donc BA non inversible » sans aucune justification, ou encore « si BA est inversible, comme $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$, alors B est inversible ».
   L'implication suivante assez étrange est également souvent rencontrée: « si BX est vecteur propre de BA de valeur propre associée 0 alors $BABX=0$ donc BX est bien vecteur propre de BA. »
4. Les questions précédentes permettaient de donner une inclusion assez rapidement, mais très peu pensent à la réciproque et trop pensent que les questions 2 et 3 aboutissent à une égalité des spectres de AB et de BA, alors que seule une inclusion a été démontrée. . Et parmi ceux qui y pensent, le rôle symétrique de A et B n'est pas toujours avancé, et est alors proposé une preuve de l'inclusion réciproque plus ou moins « mal » calquée sur 2b et 3b.
5. Cette question ouverte demandait un peu de recul par rapport aux questions traitées précédemment. Bon nombre de candidats y ont répondu correctement mais ne justifient pas leur réponse. Certains candidats pensent avoir obtenu un contre-exemple en observant avec les matrices de la question 1 que $E_2(AB) \neq E_2(BA)$. Cela ne veut pas dire pour autant que, par exemple, $E_2(AB)$ n'est pas un sous-espace propre de $E_2(BA)$, mais pour une autre valeur propre !

Partie 2

6. (a) Des confusions persistent entre les allocutions: « tous non nuls » et « non tous nuls ».
   Et aussi des confusions existent entre le polynôme de la variable X et le polynôme de la matrice A.
   La question n'était pas « montrer que A possède un polynôme annulateur » (ce qui est évident) mais « montrer que A possède un polynôme annulateur non nul de degré au plus $n-1$ ». Trop de candidats ne répondent pas intégralement à cette question.

(b) A nouveau le vocabulaire n'est pas assez maîtrisé, un réel effort doit être fait tout au long de la préparation pour bien choisir les termes à employer et bien revenir aux définitions dès qu'un doute existe. Ainsi on lit parfois que « A est racine de Q », ou que « les A^k sont racines de Q » ou « racines de la matrice A ». L'implication suivante et incorrecte est souvent rencontrée: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = 0 \Longrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_k A^k = 0$.

(c) Certains semblent répondre un peu au hasard à cette question: libre ou liée ou base?
La famille considérée est uen famille de matrices et non de polynômes, ainsi dire « qu'elle est échelonnée en degrés » n'a pas de sens.

7. (a) Dans cette question il est attendu que le fait que « A admet n valeurs propres deux à deux distinctes », ce qui est différent de la phrase « A admet n valeurs propres ». Cette justification de la dimension des sous-espaces propres est peu rencontrée.
Certains se trompe aussi dans le sens de l'inclusion pour forcer le résultat: « X vecteur propre de A de valeur propre associée λ donc $E_\lambda(A)$ inclus dans $\text{Vect}(X)$ »

(b) Cette question est souvent très bien réussie.

(c) Dans cette question il n'est demandé de prouvé que BX est un vecteur propre car il n'est aps possible ici de prouver que $BX \neq 0$.

8. Cette question est en général bien comprise et bien réalisée, cependant à nouveau la lecture de l'énoncé n'est pas toujours assez précise et certains tentent de prouver que le vecteur propre en question était « forcément » associé à la même valeur propre.

9. (a) Le mot « diagonalisable » absent de la plupart des copies. Quelques candidats démontrent en détail que A est diagonalisable à partir des dimensions et de la liberté de la famille des n vecteurs propres X_i, il n'était ici demandé que de justifier l'existence pas de la prouver.

(b) La difficulté de cette question réside dans la justification de l'inclusion $\text{Sp}(AB) \subset \{\lambda_i\mu_i, i \in [\![1, n]\!]\}$: elle est trop souvent oubliée ou repose sur le cardidal de l'ensemble $\{\lambda_i\mu_i, i \in [\![1, n]\!]\}$ non connu ici. Il était attendu d'utiliser la base de vecteurs propres $(X_1, ..., X_n)$ pour justifier que AB ne pouvait admettre d'autres valeurs propres.
Le produit suivant n'a pas de sens: AX_iBX_i. Ainsi la phrase suivante « $AX_iBX_i = \alpha_i\mu_iX_i$ pour prouver que $\alpha_i\mu_i$ est valeur propre de AB » ne peut que laisser le correcteur que très perplexe.

10. (a) Le sujet ne donnait pas de nom à l'application considéré, les candidats peuvent sans problème introduire un nom pour plus de clarté ensuite, il devra seulement vérifier que ce nom n'est pas utilisé dans l'exercice.
La linéarité est souvent oublié ou mal prouvée laissant sous-entendre que les polynômes sont linéaires: « $P(\alpha X + Y) = (P(\alpha\lambda_1 + \lambda_2), \dots)$ ». Prendre le temps de revenir à la définition de la linéarité aurait aidé de nombreux candidats.
« L'injectivité » à parfois été démontrée (en utilisant le noyau, parfois sans le dire) sans mention de la linéarité.
La surjectivité est souvent prouvée en évoquant « espaces vectoriels de dimension fini » sans montrer l'égalité des dimensions des ous-espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

(b) Deux points étaient demandés ici: l'existence et l'unicité. Ce dernier fut très souvent omis. Quant au premierpeu font le lien avec la surjectivté de la question précédente.

Beaucoup de candidats se lancent dans des calculs étranges et affirment $P(BX_i) = P(B)X_i$ ou $P(\lambda_i X_i) = P(\lambda_i)X_i$.

(c) Cette question est rarement abordée.

11. (a) Cette question est en général assez maltraitée. Beaucoup s'intéressent à $\mathscr{C}(\lambda A_1 + A_2)$ et tentent de prouver que $\mathscr{C}(\lambda A_1 + A_2) = \lambda\mathscr{C}(A_1) + \mathscr{C}(A_2))$.
D'autres choisissent deux matrices A et B de $\mathscr{C}(A)$: notation très mal choisie et qui ne peut qu'engendrer de grandes confusions et pénaliser les candidats.
Beaucoup oublie de rappeler que $\mathscr{C}(A) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Cette question de synthèse est en général bâclée et traitée de manière partielle, ainsi seulement une inclusion est prouvée. Le rédaction est souvent très brouillonne.

(c) Cette question est rarement abordée. La rédaction est très approximative: le lien (famille génératrice) entre la famille $(I, A^2, \dots, A^n)$ et $\mathscr{C}(A)$ est rarement clairement établi.

Exercice 2

Un exercice mélangeant réduction des matrices symétriques et étude du minimum d'une fonction de plusieurs variables. Les premières questions sont très classiques et permettent à tout candidat sérieux de bien les réussir. La suite de l'exercice est amplement détaillée et guidée.

1. Cette question est dans l'ensemble bien comprise.

2. (a) Cette question est une question de cours: une grande précision est attendue.
La formulation erronée suivante est assez souvent rencontrée: « Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors f est symétrique si $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$ ».

(b) Dans cette question il est attendu que la base canonique est orthonormée.

(c) Il était bon de détailler un peu, surtout quand le P^{-1} se transforme « magiquement » en ${}^tP$.
L'invocation du théorème spectral (dont le nom est chaque année écorché : on retrouve des « spectrale », et même des « spéctrale »), l'énonciation du caractère diagonalisable *en base orthonormée* ou du caractère orthogonal de la matrice de passage ne pouvaient que rassurer le correcteur !

(d) Cette question assez classique est aussi assez délicate et demande un raisonnement détaillé et propre.
Certains candidats effectivement soignent bien ce raisonnement.
Mais dans quelques copies des utilisations « du cours » donnant directement le résultat, parfois après mention d'une forme quadratique du type $q(X) = {}^tXAX$. L'utilisation de tels outils, hors programme et trivialisant la question, n'est pas acceptée.
Lorsque l'écriture matricielle du produit scalaire est utilisée $\langle f(x), x\rangle = \langle AX, X\rangle = {}^tXAX = {}^tX\,{}^tPDPX$, il est presque systématiquement omis de préciser que la base est orthonormée.
Un bon nombre de candidats considèrent que tout vecteur est un vecteur propre...pour conclure.
Des confusions sur la nature des objets manipulés est à déplorer ainsi certains ensent pouvoir parler de la croissance de la fonction f ou comparer des vecteurs: $\lambda_1 x < \lambda x < \lambda_n x$.

(e) Le raisonnement attendu ici est composé d'une double implication.
Pour de nombreux candidats $\langle a, b\rangle = 0 \Longrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.
Pour prouver la réciproque quelques candidats utilisent l'encadrement de la question 2.d. C'est pas faux, mais très maladroit.

3. (a) Cette question est rarement bien traitée: beaucoup de rédactions sont peu rigoureuses, certains utilisent l'argument « d'après le cours » pour conclure directement. Exprimer $f(x)$ à l'aide des coefficients de A est difficile et effectuer les produits scalaires posent de gros problèmes pour tout candidat ne souhaitant pas donner clairement les coefficients des vecteurs considérés.

   (b) Ceux qui pensent à prouver que la fonction est bien de classe $\mathscr{C}^1$ le font correctement.
   Les résultats obtenus sont parfois très surprenants et étonnants et peuvent se transformer dans les questions qui suivent. Tout truandage ou incohérence est pénalisé. LE résultat étant donné à la quetsion suivante un minimum de détails est attendu.

   (c) Cette question est peu traitée, la rédaction y est très approximative (confusion entre un vecteur et ses coordonnées) pour arriver au bon résultat donné dans l'énoncé.

4. Cette question est plutôt bien réussie.
   La définition rigoureuse du point critique n'apparaît pas toujours. Peu de candidats mentionnent la bijectivité de f pour prouver l'existence et l'unicité de m.

5. Le résultat étant donné ici, les correcteurs s'attendaient à un certain nombre de truandage et d'escroqueries dans la résolution de cette question. Ils n'ont pas été déçus, mais ont fortmenet pénalisés tout calculs mal menésen particulier à l'occasion de factorisations frauduleuses par $\dfrac{1}{2}$.
   Les candidats n'ayant pas soigné leur écriture et dans les copies des quels les lettres « x », « m » et « u » sont peu distinguables!
   Quelques confusions entre la symétrie du produit scalaire, et la symétrie de l'endomorphisme f sont à déplorer.

6. Cette question est peu traitée. Quand le minimum est vu, il n'est pas justifiée ou mal indiquant que $< f(x-m), x-m >$ est positif par positivité du produit scalaire.

7. (a) Cette question est en général bien faite, même pour les élèves faibles.

   (b) Cette question est en général bien traitée.

8. (a) Les choix de a et h sont très souvent corrects, le traitement des 2 signes « moins » dans le produit scalaire est souvent peu explicité.

   (b) Cette question est souvent bien abordée.

9. (a) La décroissance n'est pas toujours rigoureusement justifiée: le signe du facteur $(1-\alpha\lambda_n/2)$ est trop rapidement étudié.
   Certains candidats minorent la suite par 0 ce qui n'est a priori pas le cas.

   (b) Lorsque cette question est abordée, elle est bien justifiée.

   (c) Le théorème d'existence de limite par encadrement n'est pas toujours bien rédigé.
   Beaucoup de candidats calculent la limite au carré et oublient d'enlever le carré. Ils ne sont pas assez attentifs à l'énoncé.

10. (a) Cette question d'application est assez simple et pourtant sa résolution est assez catastrophique.
   La linéarité de f est trop souvent oubliée, et trop peu de candidats aboutissent au caractère symétrique de f.
   Trop d'étudiants échouent à démontrer la linéarité de f (!!!) car ils la confondent avec la bilinéarité de f (vue comme fonction de deux variables). Symétrie très souvent mal montrée avec beaucoup de confusions.

Certains vont même jusqu'à affirmer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = f(y, x)$ en pensant montrer que f est symétrique. Il est possible de traiter prouver que f est symétrique en regardant sa matrice, il fallait alors bien prouver la linéarité de f avant et préciser que la base considérée est une base orthonormée.

(b) L'argument de divergence est plus souvent avancé que celui de la monotonie pour conclure.

(c) Cette question est peu et mal traitée. De nombreux candidats ne réalisé pas que m est un couple d'entiers et non un réel.

(d) Cette question est rarement traitée.

Problème

Ce problème comporte trois parties. Une première partie assez simple sur l'étude d'une fonction. La deuxième partie sur la recherche de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition a été étudiée en première partie. Enfin la troisième partie a pour but l'estimation de π.

Partie 1

1. Cette question d'informatique tr!s simple demandait une certaine précision dans l'ecirture: Ainsi un oubli de parenthèses devient très fâcheux : `np.exp(x) / 1 + np.exp(x)` ou l'utilisation de `np.exponential` au lieu de `np.exp`.
2. De nombreuses erreurs dans les calculs sont à noter.
   Certains candidats se sont trompés dans le calcul de $f'(x)$ mais n'ont pas hésité à escroquer le correcteur pour aboutir au résultat annoncé.
   La plupart des erreurs de calcul viennent d'une confusion entre $(\mathrm{e}^x)^2$ et $\mathrm{e}^{(x^2)}$.
   Le réflexe de factoriser est loin d'être acquis pour beaucoup de candidats (on développe , on réorganise, on s'aide du résultat pour factoriser en dernière étape.
   Il est important de préciser que le dénominateur ne s'annule pas.
3. Les études de signes sont le plus souvent bancales. En effet, la résolution d'une inéquation seule ne saurait donner un tableau de signes complet. Pour obtenir le signe de $1 - \mathrm{e}^{-x}$, il aurait été souvent préférable d'invoquer la croissance stricte et l'annulation en 0 de $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$, ce qui n'est jamais effectué.
   Des incohérences sont parfois relevées dans les tableaux de variations comme des fonctions prenant des valeurs négatives et des limites aux bornes positives. Les candidats sont invités à se relire avec un esprit critique pour éviter ce type d'incohérence, l'idéal serait bien-sûr de les corriger mais à défaut il serait bon de les signaler;
4. Il convient de simplifier les expressions de $f(-x)$ et de $F(-x) - \dfrac{1}{2}$ afin de les relier à celles de $f(x)$ et de $F(x) - \dfrac{1}{2}$, sans quoi le correcteur ne peut que soupçonner une tentative d'escroquerie.
   Caractériser l'imparité de $F - \dfrac{1}{2}$ a causé de gros problèmes: les parenthèses mal gérées.
5. Cette question est peu traités, même si le candidat a produit des tableaux de variations corrects, c'est dommage!
   Les tracés sont souvent trop petits et peu lisibles, hésitants, certains occupant tout juste une ligne. C'est pourtant un critère essentiel d'évaluation. Il n'est pas anormal que la réponse à cette question occupe de

l'ordre d'un tiers de page.

On ne peut qu'inciter les candidats à répondre explicitement à la question : il ne s'agissait pas de déterminer un point d'inflexion, mais le faire apparaître sur le tracé.

Les asymptotes horizontales sont de temps à autre représentées confondues avec l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = 1$.

6. Comme pour tout théorème, l'utilisation du théorème de la bijection demande une vérification claire des hypothèses du théorème. L'espace d'arrivée est trop souvent donné sans justification.
   Exprimer x en fonction de y à partir de $F(x) = y$ pose souvent problème bien qu'il n'y ait pas de difficultés majeures.

Partie 2

7. Cette question sur la convergence d'une série ne devrait présenter aucune difficulté.
   Pourtant les critères de comparaisons sont mal employés, la positivité étant complètement négligée: vu : $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Et ces critères n'étaient ici mas nécessaire, il suffisait de mentionner la convergence absolue.
   D'autres candidats encore séparent les termes pairs, impairs et partent dans des raisonnements faux.
8. La définition d'une densité de probabilité est en général bien connue.
   Trop peu de candidats réinvestissent les limites de F obtenues précédemment, et procèdent plutôt à un (re)calcul laborieux de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.
   Beaucoup trop se contentent de $F' = f$ pour dire que F est la fonction de répartition.
   On trouve également quelques raisonnements à partir de F que l'on établit être une fonction de répartition dans un premier temps , de densité de probabilité associée f dans un deuxième temps.
9. Si la définition d'une variable aléatoire admettant une espérance et une variance est connue, beaucoup perdent du temps en prouvant les deux séparément et en n'utilisant pas le fait qu'une variable aléatoire ademttant ne espérance admet aussi une variance.
   Certains candidats « bluffent » en affirmant que X admet une variance car elle est bornée presque sûrement.
   Il ne suffit pas que l'intégrande tende vers 0 en l'infini pour assurer la convergence de l'intégrale.
10. (a) Un changement de variable était, on ne peut plus explicitement, attendu: le seul argument de parité était donc insuffisant pour répondre à la question.
    Quelques tentatives d'escroqueries dans le changement de variables pourtant élémentaire sont à relever.
    (b) Cette question est souvent abordée en général bien traitée, mais certaines rédactions sont trop laconiques.
11. L'égalité entre variance et moment d'ordre 2 n'est pas toujours justifiée.
    La deuxième partie de la question très rarement faite. Le choix de la primitive pour l'intégration par parties a clairement posé problème.
12. Certains candidats utilisent l'espérance d'une loi exponentielle, mais trop se trompent sur la valeur de ladite espérance.

D'autres effectuent une intégration par parties.
Enfin quelques candidats utilisent un changement de variable pour parvenir à $\Gamma(2)$.

13. Cette question est très rarement abordée.
14. (a) Cette question assez facile utilise l'inégalité triangulaire et une majoration de l'intégrande. Ces différentes étapes doivent clairement apparaître.
    La majoration $\dfrac{x\mathrm{e}^{-(N+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \leq x\mathrm{e}^{-(N+1)x}$ est trop souvent accompagnée de la justification « car $1+\mathrm{e}^{-x} > 0$ ».
    (b) Il est possible et simple d'aborder cette question en admettant la précédente.
    Certains candidats calculent (à tort !) l'intégrale de la limite pour établir la limite de l'intégrale.
15. Cette question est une question de synthèse qui pouvait être traitée en admettant les précédentes. Une certaine rigueur dans la rédaction est attendue ainsi qu'un rappel clair des questions utilisées.

Partie 3

16. En général le bon théorème est cité, mais mal justifié (en particulier l'indépendance des carrés des variables aléatoires).
    De manière étonnante, certains candidats redémontrent la loi faible des grands nombres en revenant à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (et souvent très bien fait!, mais c'est une perte de temps)
17. Il était attendu ici $T_n = \sqrt{3V_n}$. Cependant $T_n = \dfrac{3}{\pi}V_n$ convenait également ici et a été accepté.
18. Cette question est peu abordée. C'est pourtant une question très classique. Une bonne lecture de l'énoncé en début d'épreuve permettrait de repérer ce type de questions abordables.
    Il ne s'agissait pas d'évoquer la méthode d'inversion mais de montrer le résultat en identifiant les fonctions de répartition de X et de $F^{-1}(U)$.
    La fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$ n'est souvent pas bien connue.
19. Les programmes proposés sont généralement bons, quelques rares confusions entre la loi et la fonction de répartition.
20. Cette question est rarement abordée.
21. (a) Cette question est rarement abordée.
    (b) Cette question est peu abordée. mais lorsqu'elle l'est, on voit souvent π intervenir dans les bornes de l'intervalle, c'est problématique.
    (c) Quelques rares candidats ont abordé cette question, ces quelques candidats étant souvent gênés pour établir formellement la qualité d'intervalle de confiance asymptotique, ce qui s'explique par le fait qu'aucune définition précise n'apparaît dans le programme.
    (d) Cette question est rarement abordée.
    La problématique du signe de la borne inférieure de l'intervalle de confiance asymptotique n'a pas été relevée.
22. Cette question (et la suivante) est trop peu abordée. Lorsqu'elle l'est, on retrouve trop souvent des phrases du type « l'estimateur de π converge vers 3 », ce qui est pour le moins problématique.

23. Même peu abordée, cette question laisse percevoir une mauvaise compréhension de la notion de qualité d'un intervalle de confiance. Il est naturel, rassurant et pertinent de constater que π appartient toujours à l'intervalle: cela valide le travail mathématique de la partie. Mais ce même constat ne permet surtout pas d'affirmer que l'intervalle est « excellent ».