2023

ANNALES

Mathématiques Appliquées

CONCOURS
ECRICOME
PREPA

VOIE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GÉNÉRALE

CONCOURS ECRICOME PREPA

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.
- Le premier exercice portait sur les probabilités, le second sur de l'analyse et le troisième, plus long et en deux parties, sur de l'algèbre linéaire.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

Exercice 1

1. On tire une boule au hasard avec équiprobabilité. $\boxed{\text{Donc } X \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1,n]\!]}$

   Et $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2} \text{ et } V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}.}$

2. X prend des valeurs entières de 1 à n donc la seconde urne contient des boules pouvant porter des numéros entiers allant de 1 à n. $\boxed{\text{Ainsi } Y(\Omega) = [\![1,n]\!].}$

3. (a) Lorsque l'événement $[X=k]$ est réalisé, le nombre de boules présentes dans la seconde urne est égal à $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.}$

   (b) Soient k et j deux entiers compris entre 1 et n.
   • Si $j \geqslant k+1$, alors $P_{[X=k]}(Y=j) = 0$ car, sachant l'événement $[X=k]$, la seconde urne ne contient aucune boule numérotée j.
   • Si $j \leqslant k$, alors sachant l'événement $[X=k]$, la seconde urne contient j boules numérotées j sur $\dfrac{k(k+1)}{2}$ boules en tout, donc $P_{[X=k]}(Y=j) = \dfrac{2j}{k(k+1)}$.

   $$\boxed{\text{Ainsi } P_{[X=k]}(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{2j}{k(k+1)} & \text{si } j \leqslant k \\ 0 & \text{si } j \geqslant k+1. \end{cases}}$$

4. (a) Soient a et b deux réels.

   $$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} &\iff \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k+a}{k(k+1)} \\ &\iff a+b=0 \text{ et } a=1 \qquad \text{(par identification des coefficients des numérateurs} \\ &\iff a=1 \text{ et } b=-1 \end{aligned}$$

   $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.}$$

   (b) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquée à $(Y=j)$ avec le système complet d'événements $\big\{[X=k]\ :\ k \in [\![1,n]\!]\big\}$,

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{k=1}^{n} P_{[X=k]}(Y=j)P(X=k) \\
&= \sum_{k=j}^{n} P_{[X=k]}(Y=j)P(X=k) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \frac{2j}{k(k+1)} \times \frac{1}{n} && \text{D'après la question 3b} \\
&= \frac{2j}{n} \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) && \text{D'après la question 4a} \\
&= \frac{2j}{n}\left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{2j(n+1-j)}{jn(n+1)} \\
&= \frac{2(n+1-j)}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall j \in [\![1, n]\!],\ P(Y=j) = \dfrac{2(n+1-j)}{n(n+1)}$.

5. Y prend un nombre fini de valeurs, donc Y admet une espérance, et

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP(Y=j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\frac{2(n+1-j)}{n(n+1)} \\
&= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^2\right) \\
&= \frac{2}{n(n+1)}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= (n+1) - \frac{(2n+1)}{3} \\
&= \frac{n+2}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi $E(Y) = \dfrac{n+2}{3}$.

6. D'après la question 3b), si $n \geqslant 2$ alors $P\big([X=1]\cap[Y=n]\big)=0$.
Or $P(X=1)\neq 0$ et $P(Y=n)\neq 0$, donc $P\big([X=1]\cap[Y=n]\big)\neq P(X=1)P(Y=n)$.
Ainsi X et Y ne sont pas indépendantes .
Pour $n=1$, X et Y sont presque sûrement constantes égales à 1 donc elles sont indépendantes.

7. (a) D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP\big([X=k]\cap[Y=j]\big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} kjP_{[X=k]}(Y=j)P(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} kj\frac{2j}{k(k+1)}\frac{1}{n}\\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^2\\
&= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\\
&= \frac{1}{3n}\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k)\\
&= \frac{1}{3n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n+1}{18}\big(2(2n+1)+3\big)\\
&= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}.
\end{aligned}$$

Ainsi $E(XY)=\dfrac{(n+1)(4n+5)}{18}$.

(b) D'après la formule de Huygens,

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)\\ &= \frac{(n+1)(4n+5)}{18}-\frac{n+1}{2}\frac{n+2}{3}\\ &= \frac{n+1}{18}\big(4n+5-3(n+2)\big)\\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{18}\\ &= \frac{n^2-1}{18}.\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Cov}(X,Y)=\dfrac{n^2-1}{18}$.

8. (a)

```
def seconde_urne(k):
    liste = []
    for i in range(1,k+1):
        liste += [i]*i
    return liste
```

(b)

```
import numpy.random as rd

def simul_XY(n):
    X = rd.randint(1, n+1)
    urne2 = seconde_urne(X)
    nb = len(urne2)
    i = rd.randint(0, nb)
    Y = urne2[i]
    return X, Y
```

(c) Si n désigne l'argument d'entrée, alors pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, le j-ème élément de la liste renvoyée par `fonction` correspond à une valeur approchée de la probabilité de $(Y=j)$.

Ainsi, la fonction renvoie une estimation du vecteur représentant la loi de Y .

En effet, dans cette fonction, on définit une liste de n compteurs, tous initialement égaux à 0, puis on répète 10000 simulations de la variable aléatoire Y. Pour chacune de ces simulations, on incrémente de $\dfrac{1}{10000}$ le compteur correspondant à la valeur prise par Y. Dans la liste finalement obtenue, le j-ème élément correspond donc à la proportion de simulations ayant donné la valeur j.

9. (a) Les coordonnées du point moyen du nuage correspondent respectivement à des réalisations de moyennes empiriques de la forme $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$ et $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i$, où les X_i (respectivement Y_i) sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X (respectivement Y).
D'après la loi des grands nombres, les coordonnées du point moyen peuvent donc être approchées par $(E(X)\,,\,E(Y)) = \left(\frac{21}{2}\,,\,\frac{22}{3}\right)$.

(b) D'après l'expérience aléatoire étudiée, les coordonnées d'un point (x, y) du nuage doivent vérifier $y \leqslant x$, ce qui exclut la figure 1. D'autre part, Y a tendance à augmenter quand X augmente (autrement dit la covariance de X et Y est positive), donc la droite de régression linéaire possède un coefficient directeur positif, ce qui exclut la figure 4. Enfin, sur la figure 2, le point moyen du nuage n'appartient manifestement pas à la droite représentée.
La figure correcte est donc la figure 3.

Exercice 2

1. (a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

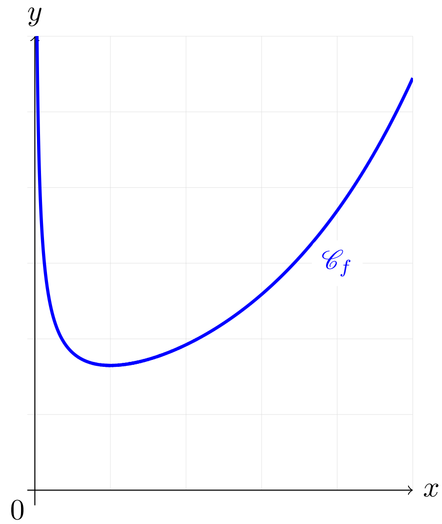
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x} - e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}}(x-1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{(x-1)}{2x} \times \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

Ainsi $f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$.

(b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $2x > 0$ et $f(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.
Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
Par produit de limites, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, et par croissances comparées $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.
On obtient donc le tableau de variation suivant

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(c)



(d) f est continue (car dérivable) et strictement monotone sur $]0,1]$ et sur $]1,+\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]0,1]$ sur $f\big(]0,1]\big) = \big[f(1), \lim\limits_{0} f\big[= [\sqrt{e}, +\infty[$, et de $]1,+\infty[$ sur $f\big(]1,+\infty[\big) = \big]f(1), \lim\limits_{+\infty} f\big[=]\sqrt{e}, +\infty[$.
Or, pour tout $n \geqslant 2$, $n \in]\sqrt{e}, +\infty[$, donc :
l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n dans $]0,1[$ et une unique solution v_n dans $]1,+\infty[$.

2. (a) On a, pour tout entier $n \geqslant 2$, $f(v_n) = n$ et $f(v_{n+1}) = n+1$ donc $f(v_n) < f(v_{n+1})$, d'où par croissance de f sur $[1,+\infty[$, $v_n < v_{n+1}$.
Ainsi $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante .

(b) On montre par l'absurde que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ diverge et tend vers $+\infty$.
Supposons que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ ne tend par vers $+\infty$. Alors, puisqu'elle est croissante, elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Alors, par continuité de f en ℓ, la suite $\big(f(v_n)\big)_{n\geqslant 2}$ converge vers $f(\ell)$. On en déduit que la suite de terme général $n = f(v_n)$ converge vers $f(\ell)$, ce qui constitue une contradiction.
Ainsi $(v_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers $+\infty$.

3. (a) Pour tout $n \geqslant 2$, $f(u_n) < f(u_{n+1})$ car $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n+1$, donc par décroissance de f sur $]0,1]$, $u_n > u_{n+1}$, donc $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante .

(b) La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée (par 0 car $u_n \in]0,1]$ pour tout $n \geqslant 2$), donc d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge .

(c) On montre par l'absurde que $\ell = 0$. Supposons $\ell \neq 0$.
Alors, puisque $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est à valeurs dans $]0,1]$, $\ell \in]0,1]$. f étant continue sur $]0,1]$, on en déduit que la suite de terme général $n = f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$, ce qui constitue une contradiction.
Ainsi $\ell = 0$.

(d) Pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{e^{\frac{u_n}{2}}}{\sqrt{u_n}} = n$, donc $n^2 u_n = e^{u_n}$, or $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0, donc $(e^{u_n})_{n\geqslant 2}$ converge vers 1 par continuité de l'exponentielle en 0, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1}$. Autrement dit, $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n^2}}$.

4. (a)

```python
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
    a = 0
    b = 1
    while b-a > eps:
        c = (a+b)/2
        if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

(b) Soient $N \geqslant 2$ un entier et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in [\![2, N]\!]$, on note $\tilde{u}_n$ une valeur approchée de u_n à $\dfrac{\varepsilon}{N-1}$ près (obtenue avec la fonction `approx_u`). On a alors, pour tout $n \in [\![2, N]\!]$, $-\dfrac{\varepsilon}{N-1} \leqslant u_n - \tilde{u}_n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{N-1}$, donc en sommant ces $N-1$ encadrements :

$$-\varepsilon \leqslant \sum_{n=2}^{N} u_n - \sum_{n=2}^{N} \tilde{u}_n \leqslant \varepsilon,$$

ainsi $\sum\limits_{n=2}^{N} \tilde{u}_n$ fournit une approximation de $\sum\limits_{n=2}^{N} u_n$ à ε près.

```python
def sp(N, eps):
    somme = 0
    for n in range(2, N+1):
        somme += approx_u(n, eps/(N-1))
    return somme
```

Exercice 3

Partie 1

1. (a) Montrons que $\mathscr{B}$ est libre.
Soient a, b, c, d des réels tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = (0,0,0,0)$.

$$\text{Alors, } \begin{cases} -a+d &= 0 \\ a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ a+d &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1:=L_1+L_4 \\ L_4;=L_4-L_1}}{\iff} \begin{cases} 2d &= 0 \\ a-b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \\ 2a &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 0 \\ d &= 0 \\ -b+c &= 0 \\ b+c &= 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3:=L_3+L_4 \\ L_4;=L_4-L_3}}{\iff} \begin{cases} a &= 0 \\ d &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \end{cases}$$

Ainsi a, b, c, d sont nuls, la famille $\mathscr{B}$ est donc libre.
D'autre part, c'est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4 , donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$.

(b)

- $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_1) = (0,0,0,0)$.
- $A\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_2) = (0,0,0,0)$.
- $A\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $f(u_3) = 2u_3$.

- $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $f(u_4) = u_3 + 2u_4$.

Ainsi, la matrice représentative T de f dans la base $\mathscr{B}$ est $\boxed{T = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}}$.

(c) Si on note $\boxed{P = \begin{pmatrix}-1&0&0&1\\1&-1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $\mathscr{B}$, alors P est inversible et, d'après la formule de changement de base, $\boxed{A = PTP^{-1}}$, où T est la matrice de la question précédente, qui est bien triangulaire.

2. (a) On a $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix}2&0&0&2\\3&2&2&1\\3&2&2&1\\2&0&0&2\end{pmatrix}}$ et $\boxed{A^3 = \begin{pmatrix}4&0&0&4\\8&4&4&4\\8&4&4&4\\4&0&0&4\end{pmatrix}}$, donc $\boxed{A^3 = 4A^2 - 4A}$.

(b) **(I)** Pour $n = 1$ on a $A^1 = 0.A^2 + 1.A$, donc $A^1 = a_1A^2 + b_1A$, avec $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe a_n et b_n des réels tels que $A^n = a_nA^2 + b_nA$. Alors, en utilisant la relation $A^3 = 4A^2 - 4A$,

$$A^{n+1} = A^n.A = (a_nA^2 + b_nA)A = a_n(4A^2 - 4A) + b_nA^2 = a_{n+1}A^2 + b_{n+1}A,$$

où $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$.

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n et b_n tels que $\boxed{A^n = a_nA^2 + b_nA}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{a_{n+1} = 4a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = -4a_n}$.

3. (a) D'après les relations obtenues à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n.}$

(b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée à cette relation est $r^2 - 4r + 4 = 0$, qui a pour unique solution $r = 2$.
Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = (\lambda n + \mu)2^n$. Or $a_1 = 0 = 2(\lambda + \mu)$ et $a_2 = 1 = 4(2\lambda + \mu)$, d'où $\lambda = \frac{1}{4}$ et $\mu = -\frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = (n-1)2^{n-2}.}$

(c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, $b_n = -4a_{n-1}$ donc $\boxed{b_n = -(n-2)2^{n-1}}$, et on vérifie que cette expression est également valable pour $n = 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reprenant l'identité $A^n = a_n A^2 + b_n A$ ainsi que les expressions de a_n et b_n obtenues précédemment, on obtient $A^n = (n-1)2^{n-2}A^2 - (n-2)2^{n-1}A$.

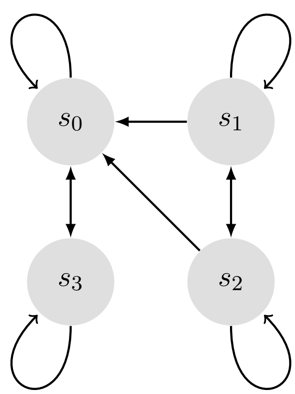
$$\boxed{\text{Ainsi } A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}} .$$

Partie 2

5. (a) La matrice d'adjacence de G est la matrice carrée d'ordre p telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, le coefficient situé en ligne i et colonne j vaut 1 lorsqu'il existe une arête menant du sommet s_{i-1} au sommet s_{j-1} , et 0 sinon.

(b) Soit M la matrice d'adjacence du graphe G . Le coefficient situé à la ligne i et à la colonne j dans la matrice M^n est égal au $\boxed{\text{nombre de chemins de longueur } n \text{ menant du sommet } s_{i-1} \text{ au sommet } s_{j-1}}$.

6. (a)



(b) D'après la question 4), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient situé (par exemple) à la première ligne et à la deuxième colonne de A^n est nul. Autrement dit, il n'existe aucun chemin menant du sommet s_0 au sommet s_1 .
$\boxed{\text{Le graphe } G \text{ n'est donc pas connexe}}$.

(c) Le nombre de chemins de longueur n menant du sommet s_3 au sommet s_0 est égal au coefficient situé à la ligne 4 et à la colonne 1 dans la matrice A^n , $\boxed{\text{il est donc égal à } 2^{n-1}}$.

7.
```python
def matrice_vers_liste(A):
    n = len(A)
    liste_adj = [] # initialisation de la liste d'adjacence
    for i in range(n): # parcours des lignes de A
        voisins = [] # initialisation de la liste des voisins de i
        for j in range(n): # parcours des colonnes de A
            if A[i][j] == 1: # si j est voisin de i
                voisins.append(j)
        liste_adj.append(voisins)
    return liste_adj
```

8. (a) Le sommet s_1 est à une distance 0 de lui-même. Les sommets s_0 et s_2 étant voisins de s_1, ils se trouvent à une distance 1. Le sommet s_3 se trouve à une distance 2 de s_1 (en considérant le chemin (s_1, s_0, s_3)).
Ainsi, la liste `distances` vaudra `[1, 0, 1, 2]`.

(b)
```python
def parcours(L, i0):
    p = len(L)
    distances = [p]*p
    distances[i0] = 0
    a_explorer = [i0]
    marques = [i0]
    while a_explorer != []:
        s = a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s]:
            if v not in marques:
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
                distances[v] = distances[s] + 1
    return distances
```

(c) Il suffit de renvoyer la liste `marques` plutôt que la liste `distances`, qui devient ici inutile.

```
def parcours_modifie(L, i0):
    p = len(L)
    a_explorer = [i0]
    marques = [i0]
    while a_explorer != []:
        s = a_explorer[0]
        del a_explorer[0]
        for v in L[s]:
            if v not in marques:
                marques.append(v)
                a_explorer.append(v)
    return marques
```

CONCOURS ECRICOME PREPA

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Une copie soignée est appréciée. En particulier un respect de la numérotation des questions de l'énoncé est attendu ; ainsi toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière.
- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs.

Dans l'ensemble, cette année, les copies sont bien présentées, propres, lisibles, les résultats sont mis en évidence et la numérotation est respectée. Cependant il reste un certain nombre de copies qui s'apparentent à un brouillon, avec des ratures peu propres et des passages illisibles. Il est recommandé de mettre en évidence les principaux résultats, et pour que les copies soient lisibles, de ne pas tasser l'écriture. Placer une ligne entre chaque question peut être une bonne pratique.
Il est clair que si le correcteur ne peut déchiffrer une partie d'une question, il n'accordera aucun point à cette question.
Les fautes d'orthographe et de grammaire sont bien trop fréquentes et rendent la lecture pénible. Même sur une copie de mathématiques, le respect des règles élémentaires d'orthographe et de grammaire est attendu.
Le respect des numérotations des questions est un point important à plus respecter. En particulier, un nombre certain de candidats ont essayé de traiter des questions isolées en fin de copie en les numérotant de façon approximative.

Avec une moyenne de 11,2 et un écart-type de 4,67, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Commentaires particuliers

On peut regretter le manque de rigueur dans beaucoup de copies. Les contradictions d'une question à une autre ne perturbent nullement les candidats.
Une attention particulière doit être apportée aux objets utilisés. Les phrases « $f(x)$ continue », « $f(x)$ décroissante », « $f(x)$ admet une bijection » sont des formulations incorrectes.

Exercice 1

Un exercice de probabilité en deux étapes. Un début assez classique, mais avec une gestion de cas un peu délicate. La fin de l'exercice était plus centrée sur de la simulation aléatoire et une étude statistique.

1. La loi a été bien reconnue dans l'ensemble. Des erreurs sont souvent apparues sur la variance et sur les notations : erreur entre simple crochets et doubles crochets.
   On trouve, dans certaines copies, beaucoup d'explications longues et inutiles, comme parler d'épreuves de Bernoulli indépendantes pour conclure à une loi uniforme.
   Certains candidats tentent des lois au hasard : binomiale, géométrique.
2. La question a été assez bien réussie, à l'exception notable de confusions conduisant à donner $[\![1, k]\!]$.
3. (a) Certaines confusions dans cette question : $\sum_{i}^{n} i^2$, $\sum_{i}^{n} i^i$ et $k!$ ont été donnés comme réponse.
   Un nombre non négligeable d'étudiants laisse la réponse sous la forme $\sum_{i}^{n} i$ sans simplifier.
   (b) L'aide de l'énoncé incitant à distinguer 2 cas a facilité le travail aux candidats. La valeur nulle est souvent trouvée, l'autre cas qui correspond pourtant à un simple cas d'équiprobabilité posait parfois problème.
4. (a) Cette question est très souvent bien réussie. La méthode utilisée ici assez classique est correctement maîtrisée.
   (b) Très peu de réponses correctes ont été proposées. Ceux qui se lancent dans la formule des probabilités totales l'écrivent souvent assez bien mais remplacent $P_{[X=k]}(Y = j)$ par $\dfrac{2j}{k(k+1)}$ pour tout j, la prise en compte du cas nul n'est pas faite.
   Quelques confusions au moment de prendre en compte le cas $P_{[X=k]}(Y = j) = 0$ conduisent à écrire une somme où k varie de 1 à j.
   Un nombre significatif d'étudiants pensent au télescopage, même lorsque les bornes de la somme sont incorrectes.
   À noter que l'erreur sur les bornes de la somme n'empêche pas certains candidats de réussir à aboutir au résultat demandé, grâce à une grande malhonnêteté dans les calculs (ce qui ne peut que les desservir).

5. La justification de l'existence de l'espérance n'est pas toujours présente, alors qu'elle est explicitement demandée par l'énoncé.
   Plusieurs candidats ont une vision de l'espérance uniquement centrée sur les séries : on voit des évocations de convergence absolue hors de propos sur cette question.
   Les calculs sont parfois d'une lourdeur et d'une maladresse étonnante, les factorisations et simplifications étant faites le plus tard possible.
6. Beaucoup de réponses données sont justes mais comportent peu de justifications rigoureuses. Le fait de dire que Y ne dépend pas de X n'est pas une explication.
   La notion de contre-exemple n'est pas maîtrisée.
7. (a) Très peu de réponses sont correctes. La majorité des copies où cette question a été démarrée ne va pas plus loin que la formule de transfert, souvent écrite avec un indice j variant de 1 à k sans justification.
   On retrouve les erreurs classiques : $\sum\sum kjP(X=k)P(Y=j)$ en affirmant que les variables X et Y ne sont pas indépendantes ou $E(XY)=E(X)E(Y)$ par linéarité de l'espérance.
   (b) Cette question est très souvent bien faite, parfois au prix de calculs d'une grande maladresse. Trop peu de candidats factorisent au fur et à mesure du calcul.
   Dans un certain nombre de copies la formule est écrite à l'envers : $E(X)E(Y)-E(XY)$.
8. (a) Cette question est trop souvent non traitée. La maîtrise des bases de l'informatique fait souvent défaut.
   (b) Les deux premières lignes sont bien réussies.
   Cependant, trop de candidats commettent l'erreur classique sur `rd.randint(a,b)`, oubliant que la valeur b est exclue, alors qu'il suffisait de bien lire l'annexe qui redonnait tout.
   Des confusions entre les valeurs des variables aléatoires X et Y et leur loi.
   La dernière ligne est souvent complétée par `Y=i`, sans même se demander quel serait alors l'intérêt d'introduire cette lettre `i`.
   (c) Très peu de candidats se lancent dans la lecture du programme et donc dans son interprétation.
   Le `simulXY(n)[1]` n'est pas bien compris, les candidats pensent souvent que l'algorithme produit une valeur ayant trait au couple (X,Y).
9. (a) Un nombre très faible de réponses à cette question, parmi lesquelles quasiment aucune réponse correcte.
   (b) Peu traitée ou uniquement en donnant une figure correcte (pas toujours la bonne) sans justification.
   Beaucoup d'erreurs d'interprétation conduisant à exclure la figure 3 au motif que $X \leqslant Y$ entraîne que les points du nuage doivent nécessairement être en-dessous de la droite, ce qui conduit les candidats à choisir la figure 2 et témoigne de leur manque de repère sur la notion de droite de régression.

Exercice 2

Un exercice d'analyse commençant par une étude de fonction, puis par l'étude de deux suites implicites. La toute fin de l'exercice portait sur de l'estimation informatique, un grand classique : la dichotomie.

1. (a) Pour la dérivabilité, trop de candidats oublient de justifier que le dénominateur ne s'annule pas. Peu de candidats font la différence entre une fonction non nulle et une fonction qui ne s'annule pas.

   Le calcul de la dérivée est en général bien mené. Certains candidats font cependant preuve de malhonnêteté pour le calcul de $f'(x)$.

   On rappelle aux candidats de bien placer le signe $=$ lors d'un calcul de fraction où le numérateur est lui-même une fraction.

   (b) Cette question est en général bien traitée : Les résultats sur les limites sont justes mais les justifications sont parfois erronées.

   (c) On pourra regretter qu'un nombre non négligeable de candidats n'essaie même pas de tracer la courbe.

   Beaucoup d'incohérences entre le tableau de variation et la courbe tracée.

   On relève plusieurs tracés où la courbe traverse l'axe des ordonnées.

   Le minimum de la fonction est régulièrement nul sur la figure, alors qu'il a été correctement donné dans le tableau de variation.

   (d) Cette question est très bien traitée avec une justification très complète dans l'ensemble.

   Sur les copies plus faibles, les intervalles images et la vérification que n appartient bien à ces intervalles est oubliée.

   Attention aux erreurs de crochets : $f(]0,1[)$ qui devient $[\sqrt{e},+\infty[$ ou encore $]+\infty,\sqrt{e}]$.

2. (a) Une confusion entre variations de f et variations de (v_n) apparaît régulièrement. Même si beaucoup de candidats ont compris que cela découlait de la croissance de f, peu d'entre eux utilisent correctement cet argument (notamment parce que la définition de fonction croissante n'est pas bien sue).

   Des confusions entre les suites implicites et les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Ainsi, certains tentent de montrer la croissance par récurrence.

   Les candidats ayant utilisé l'application réciproque ne se soucient pas de restreindre f.

   (b) Des confusions avec les suites récurrentes d'ordre 1 amènent à des raisonnements absurdes.

   La notion de continuité de la fonction f est trop rarement citée.

   Très peu de réponses sont correctement argumentées. La justification permettant de dire que si (v_n) ne converge pas alors elle tend nécessairement vers $+\infty$ est notamment quasiment toujours absente.

   Beaucoup n'arrivent pas à formuler correctement la négation de « (v_n) tend vers $+\infty$ ». Certains pensent même que cette négation est « (v_n) tend vers $-\infty$ ».

   On remarque l'utilisation inappropriée du théorème du point fixe.

3. (a) Comme à la question 2a, une grande confusion entre variations de f et variations de (u_n).

   (b) Bien traitée dans l'ensemble. On retrouve cependant des réponses incomplètes n'indiquant pas clairement un minorant. Certains indiquent que (u_n) est minorée par 1.

   (c) La question n'a presque jamais été traitée correctement. Certains candidats enchaînent un succession d'affirmations conduisant miraculeusement à une contradiction.

(d) La limite a été très peu trouvée.

On peut regretter que trop peu de candidats réussissent au minimum à déduire l'équivalent demandé, qui est immédiat en admettant la limite et en ayant un niveau de connaissances minimal sur les équivalents.

4. (a) Cet algorithme assez classique a bien été reconnu par nombre de candidats mais avec une inversion dans les 2 dernières lignes à compléter (`a=c` puis `b=c`).

(b) Cette question un peu plus délicate a peu été abordée et dans ce cas de manière incomplète : la subtilité du choix du ε n'ayant pas été relevée.

Exercice 3

Un exercice d'algèbre en deux parties. La première partie était sur de l'algèbre linéaire ayant pour but de calculer les puissances d'une matrice carrée. La deuxième partie était centrée sur une partie du nouveau programme d'informatique : les graphes. La matrice carrée de la première partie était réutilisée comme matrice d'adjacence. Les définitions et implémentations demandés dans cette partie sont explicitement des points déjà traités en cours, d'après le programme officiel.

Partie 1

1. (a) Cette question est en général abordée et la définition ou la caractérisation d'une base est en général bien connue.

Cependant la confusion entre dimension et cardinal a souvent croisée.

Beaucoup d'étudiants parlent de vecteurs libres ou de la colinéarité de 4 vecteurs.

Des confusions sur la traduction de $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0$, la première ligne du système devenant $-a + b + d = 0$ (provenant visiblement exclusivement du vecteur u_1), ce qui montre que certains candidats écrivent de manière machinale un système sans avoir compris ce qui permet d'y arriver.

Certains étudiants pensent qu'une famille de 4 vecteurs est toujours génératrice dans $\mathbb{R}^4$.

(b) Cette question a souvent été très bien traitée, mais aussi de manière assez farfelue. Parmi les nombreuses erreurs, on rencontre souvent la matrice de passage ou la matrice de f relativement à la base canonique à l'arrivée.

(c) Trop de candidats ne tiennent pas compte de la question précédente et cherchent à diagonaliser.

Certains perdent du temps à essayer de justifier l'inversibilité de P par la méthode du pivot, oubliant les propriétés d'une matrice de passage, et à déterminer l'inverse P non demandé ici.

2. (a) Cette question est bien réussie dans l'ensemble.

(b) Cette question est dans l'ensemble très bien traitée, même par des candidats dont le reste de la copie est faible, ce qui montre que ce type de question a été bien travaillé et compris.

L'initialisation est parfois mal faite : les coefficients ne sont pas explicités ou la valeur de n est autre que 1.

On retrouve cependant des raisonnements malhonnêtes dans l'hérédité.

3. (a) Cette question est relativement peu traitée.
   Certains candidats essayent une récurrence qui n'en est pas une.
   (b) Beaucoup trop de lacunes sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Certains candidats ne les reconnaissent même pas, et une bonne partie s'arrête à la résolution de l'équation caractéristique.
   On peut déplorer la disparition totale de la capacité à repérer une identité remarquable, le discriminant étant systématiquement utilisé.
   (c) Ceux qui abordent cette question ont en général de bonnes idées mais les calculs sont rarement à la hauteur lorsqu'ils partent de $b_n = a_{n+1} - 4a_n$.
4. Cette question a permis de déceler les candidats faisant preuve de malhonnêteté dans leur copie.
   Les candidats tentent des récurrences mais les calculs lors de l'hérédité ne sont quasiment jamais détaillés.

Partie 2

5. (a) La définition n'est pas bien connue des candidats. Beaucoup de réponses vagues, dénuées de sens du type « c'est la matrice qui caractérise le graphe » ou « c'est la matrice qui donne les arêtes d'un sommet ».
   la différence entre arête et chemin n'est pas maîtrisée par les candidats.
   De nombreux candidats confondent matrice d'adjacence et matrice de transition en parlant de probabilité de passer d'un sommet à un autre.
   (b) Étonnamment cette question est bien mieux réussie que la précédente.
   Parfois la numérotation des sommets ne tient pas compte de l'énoncé.
6. (a) Cette question est plutôt bien traitée. Mais quelques candidats ne savent pas ce qu'est un graphe et tracent un histogramme.
   (b) La justification de non connexité est souvent floue (« un » sommet n'est pas relié à « un » autre) voire fausse.
   Des confusions entre graphe connexe et graphe complet.
   Rappelons qu'une caractérisation est proposée au programme.
   (c) Plusieurs candidats répondent qu'il n'y a qu'un seul chemin, ce qui semblent venir d'une mauvaise lecture d'énoncé et d'une non prise en compte de la longueur n.
7. Très peu de programmes sont corrects. Certains candidats se contentent de coder la matrice A donnée dans l'énoncé.
   La commande `len` est généralement absente ou sous-entendue par une variable non explicitée.
8. (a) Peu de candidats tentent cette question et quasiment aucun de manière juste.
   (b) Beaucoup de candidats ont essayé de traiter cette question, même s'ils ont raté tous les autres algorithmes.
   Quelques candidats maîtrisent bien les graphes et le code est quasi entièrement juste. Pour les autres, presque tout est faux.
   (c) Cette question est très peu traitée.