2021

ANNALES

Mathématiques T

CONCOURS ECRICOME PREPA

VOIE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

Option Technologique

CONCOURS ECRICOME PREPA

SOMMAIRE

ESPRIT DE L'ÉPREUVE

- Vérifier chez les candidats l'existence des bases nécessaires pour des études supérieures de management.
- Apprécier l'aptitude à lire et comprendre un énoncé, choisir un outil adapté et l'appliquer (théorème).
- Apprécier le bon sens des candidats et la rigueur du raisonnement.

SUJET

- Trois exercices indépendants portant sur les trois domaines du programme.

ÉVALUATION

- Exercices de valeur sensiblement égale.

ÉPREUVE

Aucun document et instrument de calcul n'est autorisé.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. (a) $M - I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $M + 3I = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On obtient $(M-I)(M+3I) = 0$.

   (b) Le polynôme $P(X) = (X-1)(X+3) = X^2 + 2X - 3$ est donc annulateur de M.

   (c) Les valeurs propres possibles de M sont à chercher parmi les racines du polynôme P.
   Or $P(x) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x + 3 = 0 \iff x = 1$ ou $x = -3$.
   Donc les valeurs propres possibles de M sont 1 et -3.

2. (a) En développant, on a : $(M-I)(M+3I) = 0$, donc $M^2 + 2M - 3I = 0$, donc $M^2 = -2M + 3I$.

   (b)
   - $M^0 = I$ et $u_0 M + v_0 I = 0M + 1I = I$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $M^n = u_n M + v_n I$. Alors

   $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (u_n M + v_n I) \times M = u_n M^2 + v_n M = u_n(-2M + 3I) + v_n M \\ &= (-2u_n + v_n) M + 3u_n I = u_{n+1} M + v_{n+1} I \end{aligned}$$

   - Par récurrence, on a donc bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = u_n M + v_n I$.

3. (a) Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 0v_n \end{cases}$, donc la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est associée au système linéaire proposé.

   (b)
   - Comme $A^0 = I$, $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$, on a bien : $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors :

   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \cdot A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   - Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c)

```
 // Script 1
n=input('n= ')
A=[-2,1;3;0]
C=[0;1]
C=A^n*C
disp(C)
```

```
 // Script 2
 n=input('n= ')
A=[-2,1;3;0]
C=[0;1]
for k=1:n
        C=A*C
end
disp(C)
```

4. (a) $V_1 \neq 0$ et $AV_1 = V_1$ donc V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.
$V_2 \neq 0$ et $AV_2 = -3V_2$ donc V_2 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -3.

(b) $\det(Q) = 1 \times (-1) - 1 \times 3 = -4 \neq 0$, donc Q est bien inversible et on a alors :

$$Q^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $D = Q^{-1}AQ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

(d)
- Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_2 = QQ^{-1} = QD^0Q^{-1}$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $A^n = QD^nQ^{-1}$.
  Alors $A^{n+1} = A^n \cdot A = (QD^nQ^{-1})(QDQ^{-1}) = QD^{n+1}Q^{-1}$.

Donc par récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = QD^nQ^{-1}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. D est une matrice diagonale donc D^n aussi et $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3\,(-3)^n & -\,(-3)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3\,(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3-3\,(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3\,(-3)^n & 1-(-3)^n \\ 3-3\,(-3)^n & 3+(-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit donc que : $u_n = \dfrac{1}{4}\,[1-(-3)^n]$ et $v_n = \dfrac{1}{4}\,[3+(-3)^n]$.

5. (a) D'après 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M^n &= u_nM + v_nI_3 \\ &= \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,(-3)^n\right]\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,(-3)^n\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\,(-3)^n & \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\,(-3)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\,(-3)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,(-3)^n & (-3)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,(-3)^n \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4}\,(-3)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,(-3)^n & \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,(-3)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Le code **Scilab** complété permet d'afficher la matrice M^n pour un entier naturel n choisi par l'utilisateur.

EXERCICE 2

1. (a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées.
   On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

   (b) Soit $x \geqslant 1$. On a : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$
   Or $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

   (c) Pour tout $x \geqslant 1$, on a : $1 - \ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \leqslant 1 \Longleftrightarrow x \leqslant e$.
   Pour tout $x \geqslant 1$, on a donc :
   $$1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [1, e] \qquad \text{et} \qquad 1 - \ln(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [e, +\infty[$$
   On en déduit, en utilisant 1.(b), que f est croissante sur l'intervalle $[1, e]$ et que f est décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$.

2. (a) $\forall x \in [1, +\infty[\,,\ f''(x) = \dfrac{\frac{-1}{x} \times x^2 - 2x(1 - \ln(x))}{x^4} = \dfrac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}$

   (b) Pour $x \geqslant 1$, $x^3 > 0$ donc $f''(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow -3 + 2\ln(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \geqslant 3/2 \Longleftrightarrow x \geqslant e^{3/2}$.
   On en déduit que f est concave sur $\left[1, e^{3/2}\right]$ et que f est convexe sur $\left[e^{3/2}, +\infty\right[$

   (c) f'' s'annule en changeant de signe en $e^{3/2}$ donc la courbe
   $$\mathscr{C}_f$$
   admet un unique point d'inflexion au point d'abscisse $e^{3/2}$.

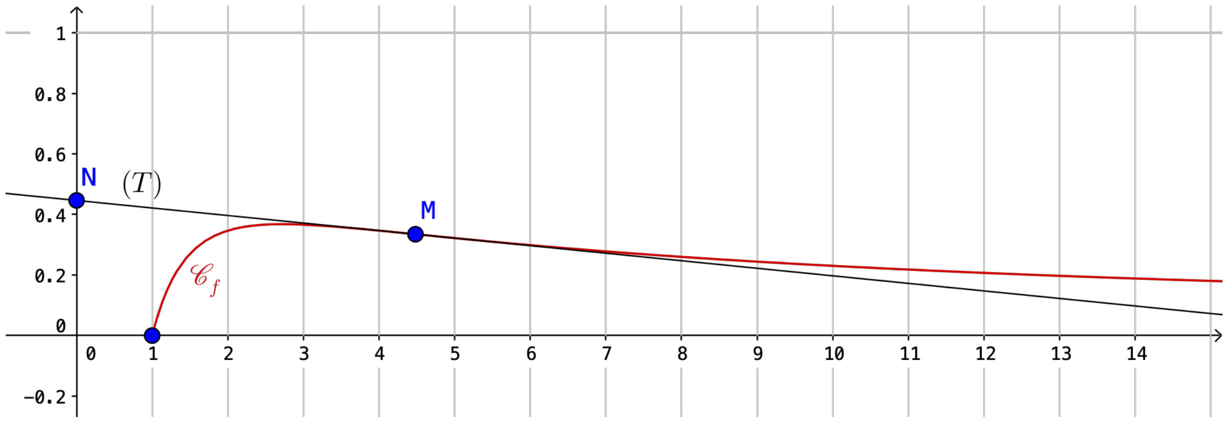
3. (a) On a $f\left(e^{3/2}\right) = \dfrac{\ln\left(e^{3/2}\right)}{e^{3/2}} = \dfrac{3}{2} e^{-3/2}$. Ainsi les coordonnées de M sont $\left(e^{3/2}, \dfrac{3}{2} e^{-3/2}\right)$

   (b) Un équation de la tangente en M est :
   $$y = f'\left(e^{3/2}\right)\left(x - e^{3/2}\right) + f\left(e^{3/2}\right).$$
   On calcule $f'\left(e^{3/2}\right) = \dfrac{1 - \frac{3}{2}}{e^3} = \dfrac{-1}{2e^3}$.
   Donc une équation de la tangente en M est : $y = \dfrac{-1}{2e^3} x + \dfrac{1}{2} e^{-3/2} + \dfrac{3}{2} e^{-3/2}$, soit :
   $$y = \frac{-1}{2e^3} x + 2e^{-3/2}.$$

   (c) La tangente (T) coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 2e^{-3/2})$.

   (d) La fonction f étant convexe sur $[e^{3/2}, +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de (T) sur $[e^{3/2}, +\infty[$.
   La fonction f étant concave sur $[1, e^{3/2}]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de (T) sur $[1, e^{3/2}]$.

4\.



5\. (a) Pour $A \geqslant 1$, on a $I(A) = \displaystyle\int_1^A \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{1}{x} \times \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^A = \frac{(\ln(A))^2}{2}$

(b) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I(A) = \lim_{A\to+\infty} \frac{(\ln(A))^2}{2} = +\infty$

On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\div\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

6\. (a) Soit $A \geqslant 1$. On pose $\forall x \in [1, A]$, $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \text{ et } v'(x) = \dfrac{1}{x^2} \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} \text{ et } v(x) = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$

Les fonctions u, u' et v, v' étant continues sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on peut intégrer par parties :

$$J(A) = \int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{-\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{-\ln(A)}{A} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^A = \frac{-\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

(b) On sait que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} f(A) = 0$ d'après 1, donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} J(A) = 1$.

7\. (a) $g(1) = \dfrac{\ln(1)}{1^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^-} g(x) = \lim_{x\to1^+} g(x) = 0$, donc g est bien continue en 1.

De plus g est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ (fonction nulle) et $]1, +\infty[$ (quotient bien défini de fonctions continues avec le dénominateur qui ne s'annule jamais).

On en déduit que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) $*$ g est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, et g est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$

$*$ g étant nulle sur $]-\infty, 1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

De plus, d'après 6.(b), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

On en déduit, par la relation de Chasles, que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 : g est une densité.

(c) Le code **Scilab** ci dessous prend en entrée un réel x et calcule $g(x)$.

```
function y=g(x)
  if x>=1 then
    y=log(x)/x^2
  else
    y=0
  end
endfunction
x=linspace(-4,8,100)
plot(x,g)
```

(d) Lors de l'exécution des lignes 8 et 9 du script précédent, on obtient le tracé de $\mathscr{C}_g$ sur l'intervalle $[-4, 8]$.

8. (a) Soit X une variable aléatoire de densité g et de fonction de répartition G.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\ \mathrm{d}t$

- Si $x < 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0$
- Si $x \geqslant 1$, $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0\ \mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{\ln(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t = 0 + J(x) = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.$

(b)
- $P\left(X > e^2\right) = 1 - P\left(X \leqslant e^2\right) = 1 - G\left(e^2\right) = \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{\ln\left(e^2\right)}{e^2} = \dfrac{1}{e^2} + \dfrac{2}{e^2} = \dfrac{3}{e^2}.$
- $P_{(X>e)}\left(X > e^2\right) = \dfrac{P\left((X > e) \cap \left(X > e^2\right)\right)}{P(X > e)} = \dfrac{P\left(X > e^2\right)}{P(X > e)} = \dfrac{1 - G\left(e^2\right)}{1 - G(e)} = \dfrac{\frac{3}{e^2}}{\frac{1}{e} + \frac{1}{e}} = \dfrac{3}{e^2}\dfrac{e}{2} = \dfrac{3}{2e}$

(c) $E(X)$ existe ssi l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\ \mathrm{d}x$ converge.

Or pour $x \geqslant 1$, $xg(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et on a vu à la question 4.(b) que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x$ diverge.

On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\ \mathrm{d}x$ diverge, donc X n'admet pas d'espérance.

CONCOURS ECRICOME PREPA

EXERCICE 3

Partie A

1. (a) Soit $n \geqslant 1$. X prenant des valeurs entières, $[X > n-1] = [X \geqslant n] = [X = n] \cup [X > n]$

   (b) Soit $n \geqslant 1$. Par incompatibilité, on a $P(X > n-1) = P(X = n) + P(X > n)$.
   Ainsi, $u_{n-1} = P(X = n) + u_n$, donc $u_{n-1} - u_n = P(X = n)$.

2. (a) Par incompatibilité,

$$P_{[X>n-1]}(X > n) + P_{[X>n-1]}(X = n) = P_{[X>n-1]}([X > n] \cup [X = n]) = P_{[X>n-1]}(X > n-1) = 1$$

   On a donc bien $P_{[X>n-1]}(X > n) = 1 - P_{[X>n-1]}(X = n)$.

   (b) Soit $n \geqslant 1$. On a donc $P_{[X>n-1]}(X = n) = \dfrac{2}{5}$.
   Or, $P_{[X>n-1]}(X = n) = \dfrac{P([X = n] \cap [X > n-1])}{P(X > n-1)} = \dfrac{P(X = n)}{P(X > n-1)}$.
   On a donc $\dfrac{P(X = n)}{P(X > n-1)} = \dfrac{2}{5}$, donc $P(X = n) = \dfrac{2}{5}P(X > n-1)$,
   soit $u_{n-1} - u_n = \dfrac{2}{5}u_{n-1}$, donc $u_n = \dfrac{3}{5}u_{n-1}$.

   (c) La suite (u_n) est donc géométrique de raison $3/5$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = u_{n-1} - u_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\left[1 - \dfrac{3}{5}\right]$, soit :

$$P(X = n) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \times \frac{2}{5}$$

   (b) Ainsi, X suit une loi géométrique de paramètre $2/5$

   (c) $E(X) = \dfrac{1}{\frac{2}{5}} = \dfrac{5}{2}$, et $V(X) = \dfrac{1-\frac{2}{5}}{\frac{4}{25}} = \dfrac{15}{4}$.

Partie B

4. (a)

```
function X=geom()
        X = 1
        while rand()>2/5
                X = X+1
        end
endfunction
```

   (b)

```
function Z=simulZ()
        X1=geom()
        X2=geom()
        if X1>X2 then
                Z=X1
        else
                Z=X2
        end
endfunction
```

5. Pour $n \geqslant 1$, $P(X_1 \leqslant n) = 1 - P(X > n) = 1 - u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

6. (a) L'appareil tombe en panne lorsque **les deux** composants tombent en panne; donc la durée de fonctionnement de l'appareil est inférieure ou égale à n si et seulement si la durée de fonctionnement de chacun de ces composants est inférieure ou égale à n, soit, pour tout n entier naturel non nul, $(Z \leqslant n) = (X_1 \leqslant n) \cap (X_2 \leqslant n)$

   (b) Pour $n \geqslant 1$, puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :

$$P(Z \leqslant n) = P((X_1 \leqslant n) \cap (X_2 \leqslant n)) = P(X_1 \leqslant n) \times P(X_2 \leqslant n) = [P(X_1 \leqslant n)]^2 = [1 - (3/5)^n]^2$$

   (c) Pour $n \geqslant 1$, on a donc :

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(Z \leqslant n) - P(Z \leqslant n-1) \\ &= \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]^2 - \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right]^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^{2n} - 1 + 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{2(n-1)} \\ &= 2\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] + \left(\frac{9}{25}\right)^n - \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= 2\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1}\left(\frac{9}{25} - 1\right) \\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

7. Les séries géométriques $\sum \left(\frac{3}{5}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{9}{25}\right)^n$ convergent car $-1 < \frac{9}{25} < \frac{3}{5} < 1$.

   Par somme, la série $\sum P(Z = n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Z = n) = \frac{4}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \frac{16}{25}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{1 - 3/5} - \frac{16}{25} \times \frac{1}{1 - 9/25} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{16}{25} \times \frac{25}{16} = 2 - 1 = 1$$

8. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$nP(Z = n) = 2n\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - n\frac{16}{25}\left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} = 2nP(X_1 = n) - nP(Y = n)$$

   (b) X_1 et Y admettent chacune une espérance, qui valent respectivement $\frac{5}{2}$ et $\frac{25}{16}$.

   On en déduit par somme que la série $\sum n \times P(Z = n)$ converge, donc $E(Z)$ existe, et on a :

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Z = n) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} nP(X_1 = n) - \sum_{n=1}^{+\infty} nP(Y = n) = 2E(X) - E(Y) = 2 \times \frac{5}{2} - \frac{25}{16} = \frac{55}{16}$$

RAPPORT D'ÉPREUVE

Commentaires généraux

Avec une moyenne de 11,48 et un écart-type de 5,52, cette épreuve a permis une sélection tout à fait satisfaisante des candidats.

Rappelons quelques faits importants :

- Une lecture préalable et attentive du sujet est nécessaire afin d'en comprendre la problématique et de hiérarchiser les difficultés. Elle permet alors au candidat d'aborder le sujet par les exercices (et/ou les questions) qui lui sont les plus accessibles.
- Le soin apporté aux copies est un élément important de l'évaluation. Ce soin porte autant sur le graphisme de l'écriture, sur le respect de la numérotation, sur le respect des règles élémentaires de la grammaire française que sur la présentation générale de la copie. En particulier, toute question abordée doit être précédée du numéro complet de cette dernière. Nous conseillons également aux candidats de numéroter toutes les pages sur lesquelles ils ont écrit quelque chose, pour faciliter la lecture du correcteur.
  Signalons qu'il est indispensable d'éviter les copies désorganisées. Des questions mélangées, notamment en fin de copie, ou au sein d'un même exercice, voire parfois des mélange de questions de plusieurs exercices rendent plus ardue la compréhension de la copie, ce qui n'avantage donc nullement le candidat.
  Dans une majorité des copies, les candidats présentent bien leur copie, indiquent clairement les questions abordées ou admises et montrent un souci de bien faire et un certain respect des correcteurs, ce qui dévalorise alors nettement les quelques candidats qui font tout le contraire.

- Une bonne connaissance des notions et résultats fondamentaux du cours est un pré-requis indispensable à la résolution correcte de nombreuses questions d'un sujet de mathématiques.
- Une rédaction correcte comportant des justifications convenables ainsi que la vérification, ou au minimum le rappel, des hypothèses nécessaires à l'application d'un théorème utilisé forment une part extrêmement importante de la note attribuée à toute question.
  Rares sont les candidats qui admettent explicitement les résultats non établis.
- Le recours à des abréviations qui n'ont pas été explicitées au moins une fois, même si elles sont relativement transparentes, (comme « TCC » en lieu et place de théorème des croissances comparées) est à proscrire.
- Vérifier la vraisemblance et la cohérence des résultats obtenus par rapport aux résultats proposés.
- L'aménagement des calculs et des raisonnements afin d'obtenir impérativement les résultats proposés est fortement sanctionné. Un manque de dextérité dans les calculs est constaté. Il est conseillé de s'entraîner très régulièrement à faire des calculs.
- Le tracé d'une allure de courbe est une attente récurrente des concours. Il convient que les candidats se préparent à ce type de questions qui est manifestement néglige par de trop nombreux candidats.

Cette année spécifiquement, les correcteurs ont relevé de nombreuses erreur dans la manipulation des notions mathématiques, notamment :

— une maîtrise insuffisante du cours et des règles élémentaires de calcul,
— de nombreuses confusion entre égalité et équivalence
— des confusions de définition dont le nom peut ressembler (constante / continue, croissante / continue)

— des problèmes de sens dans les opérations de calcul élémentaires (parenthèses, signes, ...). Il est étonnant que même les étudiants semblant avoir acquis les bases de calcul se dispensent de façon systématique des parenthèses, rédigeant de ce fait des démonstrations fausses

— des difficultés dans la simplification de fractions, de puissances, qui sont particulièrement préjudiciables.

— toute tentative de résolution d'inéquation semble vouée à l'échec. Le passage entre deux inéquations équivalentes n'est quasiment jamais justifié ou compris.

— la résolution des équations est mieux traitée mais peut souvent poser problème également.

Dans son ensemble, l'exercice 3 a été mal compris par les candidat, et c'est dans cet exercice que l'écart est le plus fragrant entre les (très) bonnes copies et les autres.

Rappelons enfin que les questions informatiques sont assez largement valorisées au sein du barème de l'épreuve, elles ne sont plus aussi souvent évitées que lors des précédentes sessions, mais elles n'en sont pas alors mieux traitées. Même si on voit une amélioration d'année en année, il semblerait qu'un grand nombre d'étudiants ne comprennent pas le programme qu'ils complètent souvent partiellement grâce à des légers automatismes. Par exemple, la programmation de la simulation d'une loi géométrique n'est pas acquis alors que c'est une question de cours.

Cette année spécifiquement, de très nombreuses copies (environ un quart des candidats) étaient presque vides. Les questions « faciles », comme les premières questions de l'exercice 1, ou celle demandant de donner l'espérance et la variance d'une loi géométrique, par exemple, ont posé problème à de nombreux candidats. Ces derniers se présentent au concours sans, semble-t-il, jamais avoir rencontré les problèmes classiques régulièrement posés : diagonalisation, polynômes annulateurs, étude de variations de fonctions, ... Peut-être ce phénomène est encore imputable à la crise sanitaire traversée depuis 2020, de nombreux candidats n'ayant malheureusement pas pu bénéficier de conditions propices au travail, ou ont du mal à reprendre leurs études après une première année tronquée. Nous espérons donc que les futurs candidats retrouveront des bases solides et serons à l'aise au moins sur ces questions classiques présentes dans tous les sujets Ecricome.

Commentaires particuliers

Exercice 1

1. (a) Les calculs de produit matriciel sont souvent bien menés. Néanmoins, on note de petites erreurs de calculs dans l'obtention de $M - I$ ou celle de $M + 3I$, ce qui conduit à un produit non nul. Les candidats, pourtant habitués à ce type de questions, devraient prendre le temps de la vérification de leurs calculs, pour une première question qui conditionne la suite.

   (b) La notion de « polynôme annulateur » n'est pas acquise chez un nombre significatif de candidats, qui choisissent de ne pas traiter cette question.
   Certains comprennent qu'il y a un lien avec l'égalité vue à la question 1(a), mais proposent alors $(M - I)(M + 3I)$ comme polynôme annulateur, ou $(X - I)(X + 3I)$ ou $(X - I)(X + 3) = 0$, ou $X^2 + 2X - 3I$, qui ne sont pas des réponses convenables chacune à leur manière.
   Certains interprètent même « polynôme annulateur » comme « matrice inverse »(puisque multiplier par M^{-1} permet de faire disparaître M), ce qui les conduit à tenter ici une inversion de la matrice M.

   (c) Peu rappellent la propriété utilisée : « les valeurs propres sont **des** racines d'un polynôme annulateur ».
   De nombreux candidats confondent ainsi l'implication précédente avec sa réciproque, et considèrent que les racines d'un polynôme annulateur sont **les** valeurs propres.

Parfois, le polynôme annulateur est développé, pour calculer ensuite ses racines par calcul du discriminant (parfois avec erreur !). Il est donc bon de rappeler que la forme factorisée d'une expression est souvent judicieuse et que les candidats devraient réfléchir lors de leur préparation et de l'épreuve à l'intérêt qu'il y a à développer une expression.

Ici, la propriété « $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$ » est fort appropriée.

2. (a) Exprimer M^2 comme le produit de M par lui même n'est pas suffisant, tout comme écrire une égalité du type : $M^2 = (M \times I).(M \times I)$.

   Il ne s'agit pas dans cette question de calculer les coefficients de M^2 mais bien de s'appuyer sur l'égalité matricielle $(M - I)(M + 3I) = O_3$ pour en déduire l'expression $M^2 = 3I - 2M$.

   (b) La récurrence est souvent bien faite lorsqu'elle est abordée. Certains candidats formulent mal l'hypothèse de récurrence (en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie, ou essaient de montrer que « $n + 1$ est vraie ».

   L'écriture $M^0 = 1$ apparaît dans quelques-unes des copies les plus faibles.

   Signalons qu'une partie non négligeable des candidats ayant abordé la récurrence ne parvient pas à démontrer l'hérédité de la propriété en lien avec la définition des suites (u_n) et (v_n), se contentant de rappeler le principe de récurrence à démontrer.

3. (a) Certains candidats ont mal lu la question posé, et ont trouvé une matrice qui vérifiait (uniquement) $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

   Certains candidats obtiennent pour A une matrice colonne au lieu d'une matrice carrée, comme cela est pourtant indiqué dans l'énoncé.

   (b) Ici, une récurrence était attendue pour obtenir les points, ce qui a souvent été fait spontanément.

   (c) Cette question a été trouvée difficile par de nombreux candidats. La différence entre les deux programmes a rarement été comprise. Dans le deuxième script beaucoup écrivent $\texttt{C=A}^k * C$.

4. (a) La vérification de la non-nullité des vecteurs V_1 et V_2 est rarement faite. C'est pourtant un point essentiel à la définition d'un vecteur propre, les correcteurs attendent a minima une mention de la propriété. Cependant, cette question a souvent été abordée par tous les candidats ayant obtenu la matrice A à la question 3(a), signe qu'ils connaissaient bien la méthode de calcul.

   (b) Cette question a été souvent traitée par les candidats, en utilisant le déterminant et la formule donnant directement la matrice inverse. Certains candidats proposent des formules hasardeuses, échangeant les signes ou les positions des coefficients. Il est dommage qu'en cas de doute, ils ne pensent pas spontanément à vérifier le produit QQ^{-1}.

   Parmi les candidats qui choisissent maladroitement d'utiliser l'algorithme de Jordan-Gauss, seuls quelques-uns justifient correctement l'inversibilité.

   (c) Pour un produit matriciel comportant deux ou trois matrices, la présentation de ce calcul par des matrices imbriquées peut se révéler utile pour faciliter l'exécution du calcul, mais fournit au final une expression peu lisible et où le résultat final apparaît peu. Ce type de présentation est à privilégier pour un calcul au brouillon mais pas pour une présentation sur la copie.

   (d) Peu de candidats expliquent pourquoi on a : $A = QDQ^{-1}$. Certains candidats pensent que toutes les matrices commutent.

(e) On attend clairement ici d'expliquer le calcul de D^n ; peu sont ceux qui mentionnent que D est diagonale pour justifier leur expression de D^n. On observe également souvent une confusion entre -3^n et $(-3)^n$.

(f) Certains candidats omettent le facteur $\dfrac{1}{4}$ dans l'expression de u_n et v_n alors qu'ils ont la bonne expression de A^n .

5. (a) À nouveau, trop de candidats pensent que calculer les coefficients de M^n revient à appliquer cet exposant à chaque coefficient de M : on découvre ainsi une préparation insuffisante de ces candidats ainsi qu'un manque de lucidité quant à l'enchaînement des questions de l'exercice.

(b) Cette question a été très peu souvent abordée, et donc peu réussie.

Exercice 2

1. (a) La connaissances des limites usuelles est un point essentiel du programme en ECT. Il est dommage que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$ ne soit pas connue par tant de candidats, (même en argumentant par croissance comparée).Beaucoup reconnaissent une forme indéterminée pour en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = 1$. Même si la limite était correcte, l'interprétation graphique n'était alors pas toujours cohérente, les candidats confondant le vertical et l'horizontal. Quelques candidats, confondant **interprétation** graphique et **représentation** graphique, font un schéma au lieu de dire, comme cela était attendu, que l'axe des abscisses est asymptote.

(b) Rappelons une nouvelle fois que la dérivée d'un quotient n'est pas le quotient des dérivées !

De nombreux candidats ne savent pas simplifier $\dfrac{1}{x} \times x$. Enfin, l'argument $x^2 \geqslant 0$ ne semble pas du tout évident pour un certain nombre de candidats.

(c) On attend clairement une étude du signe de la dérivée, ce qui est souvent passé sous silence (y compris dans les meilleures copies), la résolution d'une équation n'étant pas suffisante pour obtenir tous les points. Certains tableaux de variations sont donnés sans aucune justification.

Il est dommage que certains candidats proposent des fonctions croissantes sur $[e, +\infty[$ avec $f(e) > \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, ou le contraire parfois, ce qui montre un net manque de recul et de cohérence de la part des candidats.

2. (a) Des calculs très hasardeux. Les erreurs commises viennent souvent d'un oubli de parenthèse.

(b) Cette question a été bien comprise par les candidats, mais nécessitait d'avoir effectué des calculs corrects précédemment.

(c) Pour une telle question, répondre uniquement « Oui » ne rapporte aucun point ! Il faut bien entendu justifier sa réponse, et dans l'idéal expliquer ce qu'est un point d'inflexion. On lit souvent que c'est un point où la courbe change de signe, ce qui montre une méconnaissance du vocabulaire.

3. (a) Une valeur exacte des coordonnées de M (incluant la simplication de $\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)$!)est attendue ici.

(b) Rappelons comme chaque année que « $f'(a)(x-a) + f(a)$ »n'est pas une équation de droite.

Les correcteurs ont signalé ici des expressions assez étranges comme $y = f'(x)(x-1) + f(x)$ ou $y = f(a)(x-a) + f'(a)$. Dans le calcul de $f'(e^{3/2})$, beaucoup ne mettent pas le dénominateur au carré. De trop nombreux candidats écrivent enfin que $(e^{3/2})^2 = e^{9/4}$.

(c) Cette question a été très peu traitée. Les candidats ayant obtenu une équation de (T) pensent parfois à fixer une coordonnée à 0, mais souvent y au lieu de x.

(d) Cette question ne nécessitait aucun calcul si on avait répondu à la question 2(b), mais très peu ont su fait un tel lien.

4. Le tracé est très peu soigné dans l'ensemble. Souvent seule $\mathscr{C}_f$ était apparente, avec un tracé manquant de propreté et de clarté.

5. De façon générale sur les intégrales, la présence de l'élément différentiel dx ou dt (ou autre) est très aléatoire. Cela montre un manque de rigueur dans le soin apporté à l'écriture correcte des notations mathématiques.

(a) Une intégration par parties est souvent effectuée et souvent en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x$ ou $v(x) = x$. On relève de nombreuses confusions entre la multiplication et la division. Ainsi $\dfrac{\ln x}{x}$ devient régulièrement $x \ln x$.Il est dommage que certains candidats connaissant la bonne primitive, mais effectuent ensuite des erreurs de simplifications en confondant les propriétés du logarithme, écrivant par exemple $\dfrac{(\ln A)^2}{2} = \dfrac{2\ln(A)}{2} = \ln(A)$.

(b) Cette question dépendait beaucoup du résultat déterminé à la question 5(a), qui était souvent faux.

6. (a) Pour une intégration par parties, l'expression de fonctions u, u', v, v' est attendue.
De trop nombreux candidats utilisent la formule d'intégration par parties avec $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x^2$, confondant ainsi un produit avec un quotient !

(b) Il est surprenant que certains candidats ne proposent pas la même limite pour $\dfrac{\ln(A)}{A}$ à cette question qu'à la question 1(a).

7. (a) Un très grand nombre de candidats ne répondent pas correctement à cette question, et tentent d'en rédiger la réponse comme s'il était demandé de montrer que g est continue **par morceaux** sur $\mathbb{R}$.
En général un seul argument est donné : soit la continuité en 1, soit la continuité sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
Certains candidats étudient la continuité à gauche et à droite de 1 et pensent pouvoir conclure alors directement à la continuité sur $\mathbb{R}$. La justification de la continuité sur $[1, +\infty[$ déduite de ce que g s'identifie sur cet intervalle à un quotient de fonctions continues fait quasi systématiquement l'impasse sur le fait que le dénominateur ne s'annule pas.

(b) La définition d'une densité est bien apprise, mais souvent mal mise en œuvre. Les candidats confondent souvent l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ avec l'intégrale partielle $\displaystyle\int_1^{A} g(x)\mathrm{d}x$. Un manque de maîtrise conduit certains à évoquer la convergence de $g(x)$ au lieu de celle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) La principale erreur était d'écrire uniquement « `0` »sur la deuxième ligne au lieu de « `y=0` »

(d) Les candidats ont bien compris qu'on traçait la représentation graphique de g, mais on attendait également l'intervalle du tracé, ce qui a été très peu donné.

8. (a) Une très grande majorité des candidats écrit $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(x)\mathrm{d}x$, signe que la variable d'intégration ne fait pas forcément sens.çç La vérification que $G'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ne suffit pas pour répondre à cette question, contrairement à ce que continuent à penser certains rares candidats.

(b) Très peu de candidats simplifient $\ln(e^2)$.
On relève des erreurs de simplication de type $1-(1-a-b)=-a-b$.
Enfin, on rencontre beaucoup trop de probabilités négatives !

(c) Le lien avec la question 5.(c). a souvent été repéré par les candidats qui citent alors bien le cours.

Exercice 3

Partie A

1. (a) Une explication succincte et claire montrant la compréhension de l'énoncé est appréciée.
   (b) L'incompatibilité des événements doit être citée ici.
2. (a) On rencontre souvent l'emploi du mot « inverse » à la place de « contraire ».
   (b) Cette question est très peu souvent abordée par les candidats. Le lien avec les questions 1(b) ou 2(a) n'est donc que très rarement exprimé clairement.
   (c) Parfois les candidats reconnaissent bien une suite géométrique mais sont clairement gênés car elle est donnée sous la forme « $u_n = \frac{3}{5}u_{n-1}$ » au lieu de « $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n$ », et se retrouvent perplexes devant l'expression de u_n en fonction de n.
3. (a) Trop souvent, les candidats invoquent le caractère géométrique de la loi de X pour justifier le résultat, alors que c'est cette question qui permet d'en déduire la nature de la loi à la question suivante. Il fallait ici procéder à un calcul de probabilités en utilisant les questions précédentes sur la suite (u_n) : il est toujours avisé de faire des liens entre les questions (antérieures et postérieures) et de réfléchir à la manière dont elles s'articulent entre elles. On trouve cependant dans les meilleures copies de belles preuves du résultat demandé.
   (b) Certains proposent $3/5$ comme paramètre.
   (c) Les formules d'espérance et variance sont souvent bien connues, et pour une fois les simplifications de fractions souvent faites sans erreur.

Partie B

4. (a) Cette question a été rarement faite correctement.
   La simulation d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique est un exercice officiellement au programme en deuxième année : il s'agissait donc d'une question de cours qu'un candidat le connaissant devrait savoir traite.r
   (b) Cette question a été plus souvent faite correctement
5. Il s'agissait ici de faire le lien avec u_n, ou bien la loi de X déteminée précédemment.
6. (a) De nombreuses intersections de probabilité ont été relevées dans les copies.
   Signalons que le fait de citer que $Z = \max(X, Y)$ ne fournit pas une justification suffisante de l'égalité d'événements.
   (b) L'indépendance des événements est nécessaire et souvent omise par les candidats.
   (c) Question assez discriminante, bien traitée uniquement par les candidats ayant obtenu les résultats précédents et montrant un peu d'aisance dans les opérations de calcul.
7. Les candidats ont souvent fait soit la convergence des séries, soit la valeur de la somme, mais rarement les deux. Les candidats confondent parfois la somme de la série avec la somme partielle

8. (a) Question assez peu traitée et rarement correctement

   (b) Le calcul de $E(Z) = \dfrac{55}{16}$ est souvent correctement mené en admettant la relation proposée dans l'énoncé. Cependant, les candidats invoquent la linéarité pour obtenir la relation entre les espérances de Z, X_1, Y en se contentant de rappeler la relation prouvée (ou admise) en 8(a).